

## **LỜI NÓI ĐẦU**

Tạp chí Khoa học Trường Đại học Hồng Đức là cơ quan ngôn luận chính thức của Trường Đại học Hồng Đức, có Mã số chuẩn quốc tế ISSN 1859 - 2759, hoạt động theo Giấy phép số 14/BTTTT-GPHĐBC ngày 01/01/2009, và Giấy phép số 125/GP-BTTTT cấp lại ngày 10 tháng 4 năm 2014 của Bộ Thông tin và Truyền thông.

Tạp chí Khoa học Trường Đại học Hồng Đức là nơi phản ánh hoạt động giáo dục, đào tạo; Công bố các tác phẩm, công trình nghiên cứu khoa học của cán bộ, giảng viên, học viên, các nhà khoa học trong và ngoài trường; Tuyên truyền phổ biến các chủ trương đường lối, chính sách của Đảng và Nhà nước về công tác giáo dục, đào tạo; Giới thiệu, trao đổi các kết quả nghiên cứu, ứng dụng các thành tựu khoa học và công nghệ trong nước và quốc tế.

Hội đồng biên tập rất mong nhận được sự cộng tác nhiệt tình của đông đảo cán bộ giảng viên, cán bộ nghiên cứu, các nhà khoa học trong và ngoài trường để Tạp chí Khoa học Trường Đại học Hồng Đức mang đến độc giả những kết quả, thông tin có giá trị khoa học và hữu ích.

**HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP**



**TẠP CHÍ KHOA HỌC**  
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC HỒNG ĐỨC**  
**SỐ 51 (10 - 2020)**

---

**MỤC LỤC**

1	<i>Lê Viết Bái</i> <i>Cầm Bá Thước</i> <i>Nguyễn Ngọc Hân</i>	Hệ thống an toàn điện cho giường bệnh đa chức năng hỗ trợ bệnh nhân liệt vận động, cứng khớp	5
2	<i>Lê Ngọc Anh</i>	Mối tương quan giữa hàm lượng một số kim loại nặng với kích thước hạt trầm tích biển	15
3	<i>Doãn Thanh Cảnh</i> <i>Phạm Thị Hà</i>	Nghiên cứu xây dựng mô hình mô phỏng máy biến dòng điện từ kết quả thí nghiệm đặc tính kích thích của máy biến dòng trong thực tế	21
4	<i>Nguyễn Mạnh Cường</i> <i>Bùi Khắc Thiện</i>	Khôi phục và xấp xỉ hàm số bằng phương pháp tuyến tính trong không gian Besov	27
5	<i>Nguyễn Thị Dung</i> <i>Nguyễn Thị Việt Chinh</i> <i>Nguyễn Văn Đăng</i> <i>Trần Đăng Thành</i>	Cấu trúc và tính chất từ của hệ gồm $\text{Pr}_{0,7}\text{A}_{0,3}\text{MnO}_3$ (A = Ca, Sr, Ba) chế tạo bằng phương pháp nghiền phản ứng kết hợp xử lý nhiệt	38
6	<i>Lê Thị Giang</i>	Nghiên cứu ảnh hưởng của nồng độ pha tạp carbon lên cấu trúc của các màng $\text{Mn}_5\text{Ge}_3$ được chế tạo trên đế Ge(111)	48
7	<i>Hoàng Đình Hải</i> <i>Vũ Thị Nhì</i> <i>Nguyễn Thị Hương</i>	Vành với các điều kiện của linh hóa tử trái mịn	56
8	<i>Đỗ Thị Hải</i>	Nghiên cứu thành phần thực vật khu vực núi Miêng, xã Phúc Thịnh, huyện Ngọc Lặc, tỉnh Thanh Hóa	66
9	<i>Trần Thị Hải</i> <i>Nguyễn Thị Thảo</i> <i>Nguyễn Thị Dung</i> <i>Nguyễn Thị Tú</i>	Nghiên cứu độ linh động của hạt tải trong kênh dẫn Ge pha tạp điều biến phụ thuộc vào nhiệt độ	72

- |    |  |   |     |
|----|--|---|-----|
| 10 | <i>Lê Văn Hào</i><br><i>Trịnh Thị Anh Loan</i><br><i>Lê Việt Nam</i><br><i>Nguyễn Đức Toàn</i> | Phát hiện giả mạo khuôn mặt sử dụng công nghệ trí tuệ nhân tạo  | 83  |
| 11 | <i>Hoàng Diệu Hồng</i>   | Mô hình tăng trưởng Sollow ngẫu nhiên   | 95  |
| 12 | <i>Trịnh Thị Hồng</i><br><i>Nguyễn Hữu Tân</i><br><i>Thiều Thị Huyền</i>                       | Thành phần thức ăn của một số loài lưỡng cư thuộc họ Nhái bầu ( <i>Microhylidae</i> ) tại Vườn quốc gia Bến En, tỉnh Thanh Hóa  | 106 |
| 13 | <i>Nguyễn Mạnh Hùng</i>  | Một số tính chất cơ bản của hàm dẫn xuất  | 114 |
| 14 | <i>Lê Quang Huy</i>  | Chỉ số chính quy Castelnouvo-Mumford của Idêan cạnh và kích thước nhỏ nhất của ghép cặp cực đại của đồ thị đơn  | 119 |
| 15 | <i>Lê Thị Oanh</i>   | Nửa nhóm liên tục đều trong không gian Banach xác suất  | 127 |
| 16 | <i>Lê Thị Thương</i><br><i>Nguyễn Thị Mùi</i>  | Nghiên cứu sử dụng Bèo tây ( <i>Eichhornia crassipes</i> ) và cây Sậy ( <i>Phragmites australis</i> ) xử lý nước bị ô nhiễm các kim loại nặng, Cadimi (Cd), Chì (Pb), Kẽm (Zn) và Đồng (Cu) | 133 |

# HỆ THỐNG AN TOÀN ĐIỆN CHO GIƯỜNG BỆNH ĐA CHỨC NĂNG HỖ TRỢ BỆNH NHÂN LIỆT VẬN ĐỘNG, CỨNG KHỚP

Lê Viết Bái<sup>1</sup>, Chăm Bá Thức<sup>2</sup>, Nguyễn Ngọc Hân<sup>3</sup>

## TÓM TẮT

*Giường bệnh đa năng cần có một hệ thống điện để đảm bảo các hoạt động của giường một cách tự động. Với những giường có nhiều chức năng, các chức năng hoạt động đồng thời có thể xảy ra xung đột. Bài viết này trình bày kết quả nghiên cứu thiết kế hệ thống điện nhằm tránh xảy ra trường hợp xung đột, bảo đảm an toàn cho người bệnh cũng như kết cấu cơ khí của giường.*

**Từ khóa:** *Giường bệnh đa năng, an toàn cho giường bệnh.*

### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Ngày nay yêu cầu chất lượng cuộc sống (Quality of Life) ngày càng cao nên đòi hỏi chất lượng chăm sóc y tế cũng phải được nâng lên để đáp ứng nhu cầu thực tế của xã hội, điều đó đã tạo áp lực cho hệ thống y tế cũng như toàn bộ nền kinh tế.

Theo số liệu thống kê từ năm 1990 đến 2017, hàng năm, trên thế giới có từ 140 đến 161/100.000 dân bị đột quỵ [1]. Số liệu này ở Trung Quốc lớn hơn 2 lần trung bình trên thế (354/100.000 dân) [2]. Trong khi đó, tỷ lệ mắc mới đột quỵ ở Châu Âu từ 95 - 290/100.000 dân [3]. Bên cạnh đột quỵ, tỉ lệ chấn thương sọ não ở trẻ em trên thế giới là 47 - 280ca/100.000 trẻ, trong đó bị nhiều nhất ở hai nhóm tuổi là dưới 2 tuổi và tuổi vị thành niên (15 - 18 tuổi) [4]. Mỗi năm trên thế giới có 69 triệu người bị chấn thương sọ não, nguyên nhân chủ yếu do tai nạn giao thông, cao nhất ở Châu Phi và Đông Nam Á (56%) [5].

Các nghiên cứu thống kê của các nhóm tác giả khác nhau cho thấy tổn thương tủy sống cũng chiếm tỉ lệ từ 8 - 246 ca/triệu dân tùy từng khu vực [6 - 8].

Những bệnh nhân đột quỵ não, chấn thương sọ não, tổn thương tủy sống thường phải nằm điều trị dài ngày dẫn đến những thương tật thứ cấp như loét do đè ép, teo cơ, cứng khớp, loãng xương...

Loét do đè ép (Pressure Ulcer) hay còn gọi là loét giường, loét nằm là rất thường gặp ở tất cả các bệnh nhân, đặc biệt là những bệnh nhân tổn thương não, tủy sống và là nguyên nhân kéo dài ngày nằm viện, gây tổn kém, cản trở mục tiêu phục hồi chức năng và ảnh hưởng lớn đến tâm lý bệnh nhân. Phân tích dữ liệu trên toàn thế giới cho thấy tỷ lệ loét ở bệnh nhân khoa điều trị tích cực từ 0,9 % đến 41,2% [9,10].

<sup>1</sup> Hội đồng Trường, Trường Đại học Hồng Đức

<sup>2</sup> Bệnh viện phục hồi chức năng Trung ương

<sup>3</sup> Bệnh viện Đa khoa Triệu Sơn, Thanh Hóa

Ở Việt Nam chưa có số liệu quốc gia về đột quỵ não, chấn thương não, chấn thương tủy sống, loét do đè ép, các di chứng do nằm viện kéo dài cũng như các chi phí chữa trị cho những mặt bệnh này; Tuy nhiên, theo một số thông tin [11], ước tính mỗi năm có hơn 200.000 người mắc đột quỵ, 800.000 người mắc chấn thương não và trên 3000 người tổn thương tủy sống, đa phần những bệnh nhân này đều khuyết tật nặng nề, nhiều biến chứng và thương tật thứ cấp như loét, teo cơ, hạn chế tầm vận động khớp, loãng xương...; các thương tật thứ cấp này làm trì hoãn mục tiêu phục hồi chức năng, kéo dài thời gian nằm viện, tăng chi phí điều trị và là nguyên nhân gây tàn phế thậm chí là tử vong.

Vật lý trị liệu phục hồi chức năng là phương pháp được tiến hành sớm ngay từ khi bị bệnh nhằm giảm thiểu hình thành các thương tật thứ cấp, giúp người bệnh duy trì và phục hồi tối đa các chức năng vận động và sinh hoạt, giúp họ có thể sống độc lập, nâng cao chất lượng sống thậm chí có thể quay lại học tập hay làm việc.

Trong vật lý trị liệu thì vận động trị liệu là hết sức quan trọng, làm giảm thiểu hình thành các vết loét tỳ đè, viêm phổi do nằm lâu, tạo thuận lợi cho đường tiêu hóa và tiết niệu tránh nhiễm trùng tiểu và táo bón; đối với hệ cơ xương khớp, tập vận động giúp duy trì tầm vận động khớp, độ dài của bắp cơ, tránh teo và co rút các bắp cơ, tránh cứng khớp và loãng xương ở những người bệnh phải nằm điều trị kéo dài. Đối với người bệnh nằm liệt giường, việc lăn trở phòng loét phải được tiến hành đều đặn 2 - 3 giờ mỗi lần, mỗi lần lăn trở phải kết hợp xoa bóp các vùng tỳ đè, vỗ rung lồng ngực, xoa bóp hướng tâm kết hợp tập một vài động tác vận động cho các chi thể để phòng tránh ứ trệ tuần hoàn hình thành huyết khối ở tĩnh mạch sâu của các chi đặc biệt là hai chi dưới. Những công việc này chủ yếu được thực hiện bằng tay bởi các kỹ thuật viên vật lý trị liệu và điều dưỡng chăm sóc. Tuy nhiên do điều kiện về nhân lực còn hạn chế dẫn đến việc lăn trở và tập luyện cho người bệnh chưa được thực hiện một cách đầy đủ như yêu cầu của việc điều trị dẫn đến nhiều bệnh nhân vẫn bị loét, teo cơ, cứng khớp, hình thành di chứng xấu, cản trở sự phục hồi của người bệnh.

Để hỗ trợ cho việc chăm sóc và phục hồi chức năng cho những bệnh nhân nói trên, hiện nay nhiều loại giường bệnh và thiết bị phục hồi chức năng đã được nghiên cứu chế tạo và đã có mặt trên thị trường với nhiều chủng loại, mẫu mã. Tuy vậy, những loại giường và thiết bị phục hồi chức năng này cũng có một số hạn chế như chưa tích hợp các chức năng của chiếc giường với các thiết bị tập phục hồi chức năng. Điều này gây ra bất tiện khi bệnh nhân muốn sử dụng các thiết bị phục hồi chức năng.

Thực hiện đề tài nghiên cứu khoa học “Nghiên cứu chế tạo giường bệnh đa chức năng nhằm hỗ trợ điều trị bệnh nhân liệt vận động, cứng khớp và cải thiện chất lượng cột sống cho người bệnh” theo đơn đặt hàng của UBND tỉnh Thanh Hóa, cụ thể là nghiên cứu chế tạo giường bệnh có 4 chức năng: (1) Điều chỉnh tư thế như nằm ngửa, nằm nghiêng sang hai bên, nửa nằm - nửa ngồi, ngồi và đứng; (2) tập vận động các khớp chi dưới để phòng cứng khớp, teo cơ, loãng xương và huyết khối tĩnh mạch;

(3) kéo giãn cột sống thắt lưng bằng chính trọng lượng của chính người bệnh để điều trị đau thắt lưng; và (4) di chuyển theo ý muốn của nhân viên y tế, bệnh nhân hoặc người nhà..., hệ thống điện an toàn cho giường bệnh cần phải được nghiên cứu nhằm bảo đảm an toàn cả về điện cũng như cơ khí.

Đối với người không tinh táo, không thể tự điều chỉnh các tư thế cũng như điều chỉnh trong quá trình tập luyện, có thể xảy ra một số trường hợp các vận động đồng thời sẽ gây nguy hiểm cho người bệnh do sự xung đột giữa các vận động. Chẳng hạn người bệnh đang trạng thái ngồi lại cho lật nghiêng hay đang ở trạng thái nằm nghiêng lại cho nâng đầu... Để có thể giải quyết được vấn đề này, chương trình phần mềm đã được tính đến. Tuy nhiên vì một lý do nào đó, chẳng hạn cảm biến báo thiếu chính xác dẫn đến chương trình không thể nhận ra. Vì vậy các vận động đồng thời có thể diễn ra mà không kể đến điều kiện cho vận động. Điều này dẫn đến nguy hiểm cho người bệnh cũng như kết cấu cơ khí.

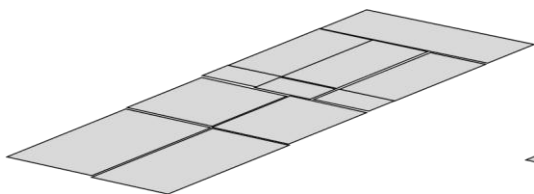
Ngoài ra, đối với các nước tiên tiến, người nhà bệnh nhân không ngồi lên giường bệnh. Ở Việt Nam, mặc dù đã có quy định nhưng việc người nhà ngồi lên giường bệnh là rất phổ biến. Việc này không gây ảnh hưởng lớn đến giường thông thường nhưng đối với giường tập luyện thì phần chân trên giường bệnh thường được để tự do để có thể tập chân cho người bệnh. Do vậy việc ngồi lên phần này sẽ làm ảnh hưởng đến kết cấu cơ khí. Để an toàn cho kết cấu, cần phải có kết cấu đỡ chân và đầu giường. Tuy nhiên, khi có kết cấu đỡ này thì việc hạ chân hay hạ đầu để tập khớp nếu không tháo dỡ các phần đỡ chân và đầu tương ứng sẽ không chỉ không tập được mà còn phá hủy kết cấu cơ khí. Để bảo vệ kết cấu cơ khí cũng như vẫn duy trì chức năng tập các khớp này của giường thì hệ thống an toàn cũng phải tạm ngừng hoạt động của khớp khi phần chân và đầu chạm vào thanh đỡ. Các khớp sẽ được tập sau khi tháo dỡ các phần đỡ tương ứng.

Do vậy, để đảm bảo một cách tuyệt đối an toàn cho người bệnh, lớp bảo vệ thứ hai cần phải được thiết lập. Bài viết này báo cáo kết quả nghiên cứu hệ thống an toàn cho giường bệnh nói trên.

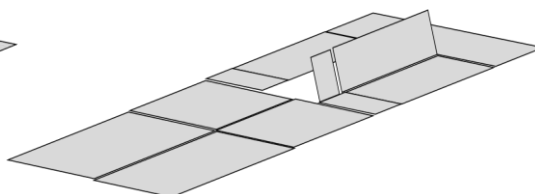
## 2. ĐIỀU KIỆN AN TOÀN

### 2.1. Mô tả khả năng của giường

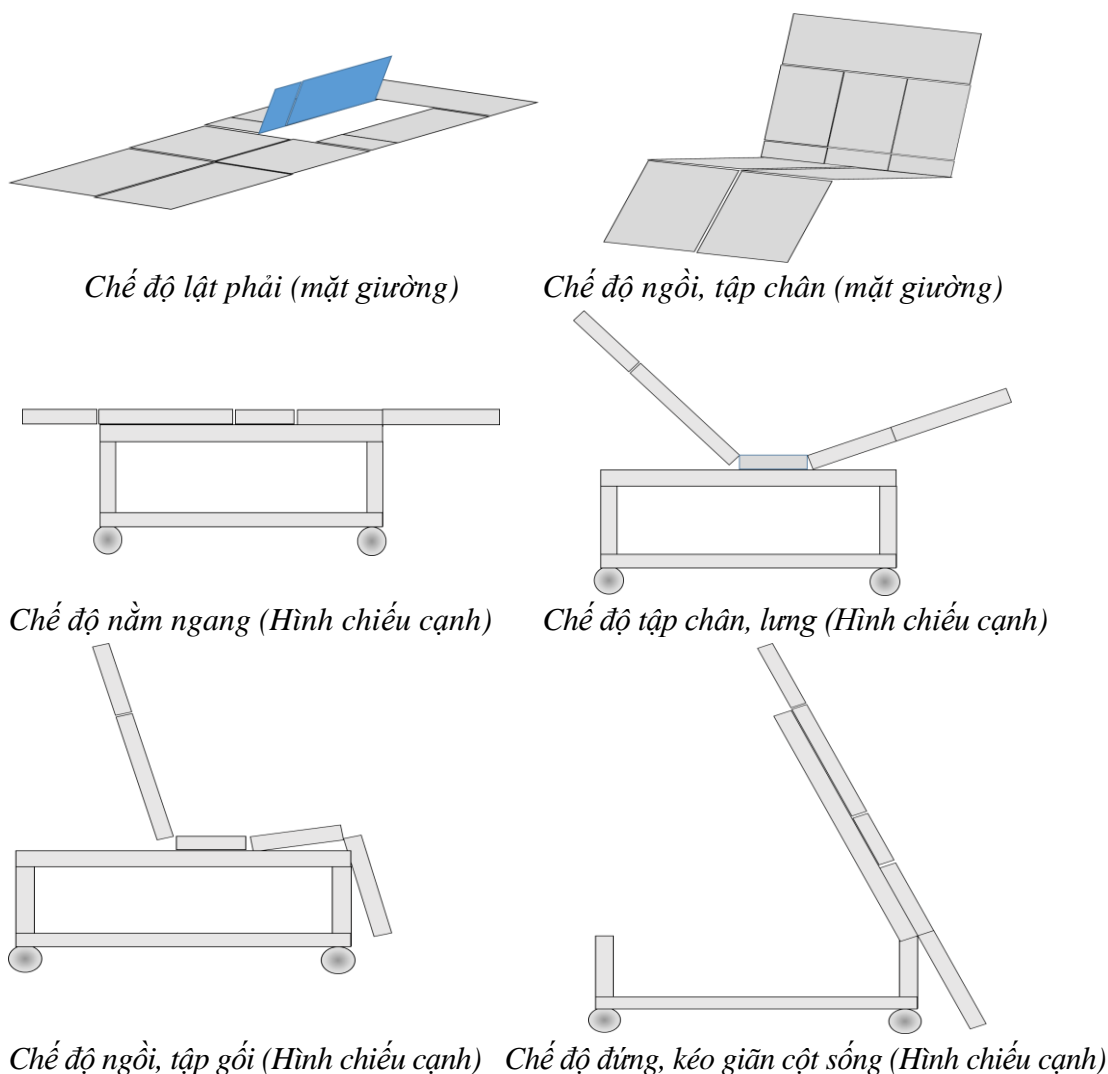
*Khả năng của giường có thể được mô tả bằng các trạng thái sau đây*



*Chế độ nằm ngang (mặt giường)*



*Chế độ lật trái (mặt giường)*



**Hình 1. Mô hình giường bệnh đa năng**

Lưu ý rằng chân và đùi bên trái và phải hoàn toàn độc lập với nhau. Điều này cho phép người bệnh được tập luyện độc lập các khớp phải và trái.

*Một số điều kiện an toàn đặt ra*

*Điều kiện khi lật nghiêng trái, phải:* Việc lật phải hay trái chỉ được thực hiện khi toàn các khớp cổ, lưng, đùi, chân phải ở trạng thái tự do. Đồng thời, tại một thời điểm, chỉ có thể thực hiện lệnh lật hoặc sang phải, hoặc sang trái. Nếu lật phải và trái đồng thời thì sẽ phá hủy cơ cấu cơ khí của giường.

*Điều kiện khi nâng lưng:* Việc nâng lưng chỉ được thực hiện khi trạng thái lật nghiêng (trái, phải) không được kích hoạt. Ngoài ra, góc hợp bởi lưng và đùi trái/phải cần phải nhỏ hơn một góc tối thiểu nào đó (thường chọn  $90^\circ$ ) để tránh trường hợp người bệnh bị ép khi đồng thời nâng lưng và đùi tối đa.



*Điều kiện khi nâng dốc giường, kéo giãn cột sống:* Khi dốc hạ giường, đầu hoặc chân có thể chạm với phần giá đỡ tương ứng (đảm bảo độ vững chắc của giường) thì hệ thống phải ngừng lại. Dĩ nhiên việc thay đổi ngược lại với di chuyển ban đầu phải được thực hiện mà không bị cản trở.

### 3. THIẾT KẾ HỆ THỐNG AN TOÀN

*Nguyên tắc chung:* Để bảo đảm được các yêu cầu trên, chúng tôi lựa chọn thiết bị gồm công tắc hành trình (sau này được viết tắt là CT) và diot nắn dòng (sau này được viết tắt là D). Một số CT có mục đích là cấp điện cho các driver. Một số CT với mục đích là cấp và ngắt điện đến xi lanh điện. Những CT này được lắp song song với diot với mục đích là ngăn dòng theo chiều đi (ứng với nâng/hạ) và ngắt khi gặp vấn đề (bảo đảm an toàn) nhưng có thể thực hiện chiều ngược lại khi được cấp dòng ngược. Lúc này diot sẽ cho chiều ngược (ứng với hạ/nâng) mà không gặp trở ngại.

#### 3.1. Bố trí hệ thống công tắc hành trình

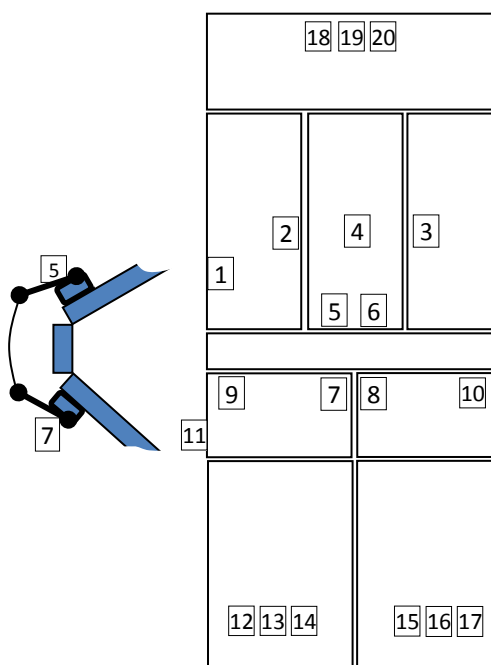
Hệ thống CT được bố trí tại các vị trí như hình 2.

Với ký hiệu các CT bằng các số thứ tự trên hình 2. Mỗi CT này phải ngắt khi các thao tác tương ứng sau đây được thực hiện:

1. Khi nâng lưng;
2. Lật trái;
3. Lật phải;
4. Lật trái hoặc phải;
- 5,7; 6,8: Đùi phải, trái nhỏ hơn  $\alpha$ ;
- 9, 10: Nâng đùi phải, trái;
- 11: Nâng giường;
- 12-17: Chân chạm thanh đỡ chân;
- 18-20: Đầu chạm thanh đỡ đầu.

Chú ý là CT 5 và 7; 6 và 8 được ghép nối như trên hình (trái). CT 5/6 được gắn với lưng còn 7/8 gắn với đùi phải/trái. Khi lưng và đùi gấp quá mức (nhỏ hơn  $\alpha$ ) thì sợi dây nối 2 CT căng ra và ngắt cả 2 CT. Lúc này lưng và đùi tương ứng không thể tiếp tục gấp lại được. Hình 3 lần lượt trình bày hệ thống điện cho việc thực hiện các thao tác lật trái, phải, các khớp.

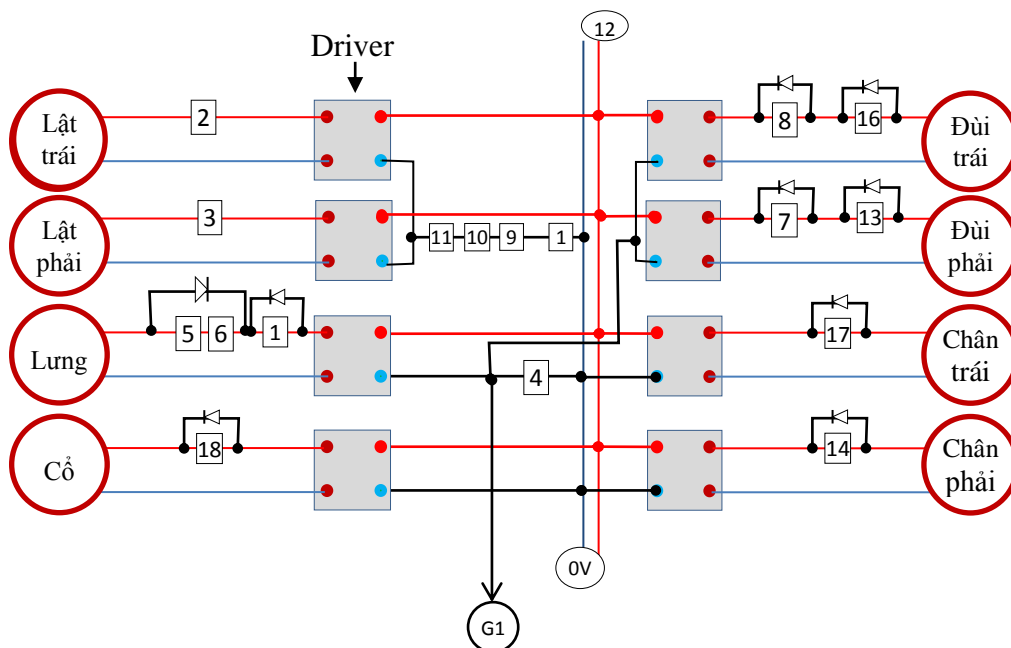
Các driver sẽ nhận điện áp vào 12V và xuất điện áp ra 12V theo 2 chiều ngược nhau nhằm điều khiển các xi lanh điện nâng/hạ khi có lệnh từ vi xử lý. Các xi lanh



**Hình 2. Sơ đồ bố trí các công tắc hành trình trên hệ thống cơ khí**

điện đảm nhận việc tập cho các khớp tương ứng. Các công tắc hành trình được lắp đặt trên sơ đồ và được đánh số thứ tự tương ứng như sơ đồ bố trí công tắc hành trình và nhiệm vụ của chúng.

### 3.2. Nguyên tắc làm việc của hệ thống



**Hình 3. Sơ đồ bố trí các công tắc hành trình trên hệ thống điện**

#### 3.2.1. Điều kiện khi lật nghiêng trái, phải

Trạng thái lật trái, phải chỉ được thực hiện khi người nằm ngang, tư thế thẳng người. Khi đó, công tắc 1, 9, 10, 11 nối tiếp với nhau và điều khiển (lưng, đùi phải, đùi trái, giường không được nâng). Điện 12V được cấp cho 2 driver của xi lanh điều khiển lật trái và lật phải.

#### 3.2.2. Điều kiện khi nâng lưng

Nâng lưng chỉ được thực hiện khi người nằm ngửa, đồng thời góc nâng lưng và các đùi không nhỏ hơn  $90^0$ . Lưng chỉ được hạ khi phần đầu không chạm thanh đỡ đầu (tạo sự chắc chắn khi có người nhà ngồi lên đầu giường).

Khi nâng lưng, dòng +12V từ driver (chân phía trên) qua CT 4 (đóng khi lưng nằm ngửa), 5, 6 (khi góc nâng lưng và các đùi không nhỏ hơn  $90^0$ ) và CT 19 song song với diot D19 (do vậy bất kể là phần đầu chạm vào thanh đỡ đầu thì đều có thể nâng lưng để tránh chạm hoặc tháo dỡ phần đỡ đầu) qua xi lanh rồi về 0V (chân phía dưới driver).

Khi hạ lưng, dòng đi từ +12V vào chân phía dưới driver qua động cơ; qua 4,5,6 (song song với diot 456) qua CT 18 nếu phần đầu giường không chạm vào thanh đỡ đầu nếu hạ lưng). Khi chạm vào thanh đỡ đầu, CT 19 ngắt, bảo vệ hệ thống cơ khí. Để lưng hạ ngang, cần phải nâng đầu.

### 3.2.3. Hạ đầu, hạ lưng và hạ giường

Để đảm bảo có thể hạ đầu với góc âm nhưng vẫn có cơ cấu thanh đỡ đầu để bảo đảm độ chắc chắn khi có người ngồi lên đầu giường, một hệ thống 3 công tắc CT 18-20 được lắp đặt.

Khi hạ đầu, nếu phần đầu chạm thanh đỡ đầu, CT 18 ngắt. Do điôt D18 ngăn dòng khi hạ đầu nên xi lanh dừng lại. Tuy nhiên việc nâng đầu không bị ảnh hưởng, nghĩa là lúc này vẫn có thể nâng đầu bình thường. Để có thể hạ đầu người hỗ trợ phải tháo hệ thống khung đầu giường (đỡ đầu).

Để bảo đảm tuyệt đối an toàn cho cơ cấu cơ khí, CT 19 và 20 được lắp đặt để không chế việc hạ lưng và hạ giường trong trường hợp cố vẫn tạo góc âm với lưng. Theo đó, khi hạ lưng, CT 19 sẽ ngắt khi phần đầu chạm vào thanh đỡ đầu. Lúc này cố có thể nâng đầu đến góc 0 để hạ lưng. Tương tự, khi hạ giường mà góc cố vẫn âm, phần đầu cũng sẽ chạm thanh đỡ đầu và CT 20 ngắt mạch. Việc hạ giường chỉ có thể tiếp tục nếu nâng đầu khỏi giá trị góc 0.

### 3.2.4. Bảo vệ đùi và lưng khỏi góc bé hơn giá trị $\alpha$ nào đó (tránh người bị ép)

Khi góc hợp bởi lưng và đùi (trái, phải) nhỏ hơn góc tối thiểu  $\alpha$  (chẳng hạn 90 độ để không ép lưng và đùi lại), cơ cấu kéo làm cho CT 5,7 hoặc/và 6,8 ngắt mạch làm dừng việc nâng lưng hoặc đùi. Điều này sẽ bảo vệ được người bệnh không bị ép. Việc hạ lưng/đùi sẽ không bị ảnh hưởng nhờ dòng có thể qua điôt tương ứng mà không cần qua CT.

### 3.2.5. Bảo vệ cơ cấu cơ khí khi giường chạm phần đỡ chân

Để bảo đảm kết cấu cơ khí chắc chắn khi có người ngồi lên giường tại vị trí chân, thanh đỡ chân được kết cấu vào giường. Tuy nhiên, nếu vậy thì khi hạ chân sẽ chạm vào thanh đỡ chân và có thể phá hủy cơ cấu cơ khí. Để tránh được điều này, hệ thống CT 12-17 được lắp đặt.

Khi hạ chân, đùi, giường, nếu chân chạm vào thanh đỡ chân, CT 14 (chân phải), CT17 (chân trái), CT13 (đùi phải), CT16 (đùi trái), CT12 nối tiếp CT15 ngắt sẽ lần lượt dừng việc hạ chân, đùi, giường. Lúc này, việc nâng chân, đùi, giường lên để có thể lấy khung đuôi giường hoàn toàn có thể thực hiện do các điôt cho dòng quay về.

## 3.3. Phần điện hệ thống nâng giường, kéo giãn cột sống

Hình 4 trình bày hệ thống điện phục vụ cho xi lanh để nâng giường, kéo giãn cột sống bằng trọng lượng cơ thể. Nguồn điện cấp cho hệ thống nâng lưng 24V, có chung 0V với nguồn 12V. Mục đích là sử dụng cho việc thực hiện hệ thống bảo vệ kết cấu cơ khí cũng như bảo vệ trạng thái tập của người bệnh.

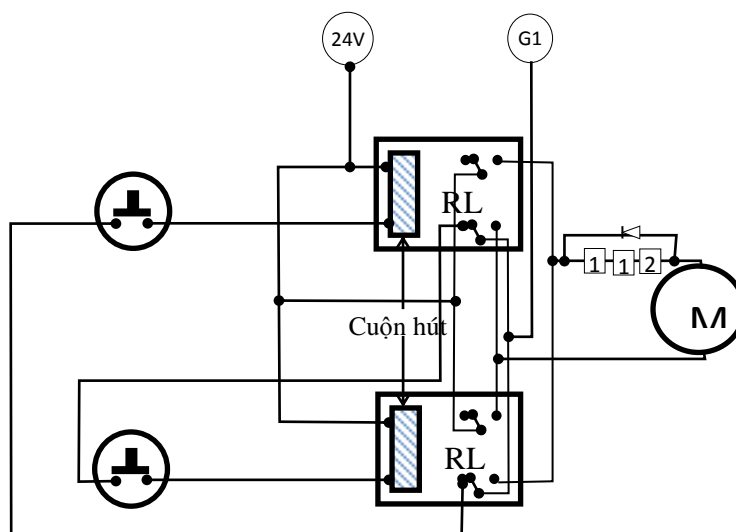
Nguyên tắc: Nhiều nhất chỉ một phím bấm được kích hoạt (hoặc lên, hoặc xuống cho dù người sử dụng ấn đồng thời 2 phím). Đồng thời, hệ thống sẽ dừng lại nếu phần đầu hoặc chân chạm vào thanh đỡ tương ứng.

Để kích hoạt nâng hoặc hạ giường, các phím P1 và P2 được ấn để cung cấp dòng qua cuộn hút của rơ le RL1 và RL2. Đây là 2 rơ le loại 8 chân. Ở trạng thái chờ, nguồn 0V được cấp vào một đầu chờ của phím P1 và P2 nhờ RL 2 và RL 1 tương ứng. Khi ấn các phím P1 và P2, một trong hai rơ le sẽ ngừng cấp điện áp 0V cho phím khác. Kết quả là phím P1 ấn trước thì RL 1 được cấp dòng nuôi và RL 2 không được cấp dòng nuôi vì khi đấy 0V của P2 đã bị mất, cuộn hút của RL 2 vì thế không được cấp dòng nuôi cho dù lúc đó phím P2 cũng đã được nhấn. Điều ngược lại cũng xảy ra nếu phím P2 được ấn trước.

Kết quả là chỉ một trong 2 trạng thái xi lanh được cấp điện áp để nâng hoặc hạ giường.

Với việc kết nối như hình vẽ, xi lanh điện được cấp dòng theo 2 chiều ngược nhau khi nhấn 2 phím khác nhau.

Xi lanh được cấp dòng qua 3 công tắc hành trình. CT4 đóng khi trạng thái lưng không bị lật. Lúc đó, nguồn 0V mới được cấp để các rơ le RL 1 và RL 2 hoạt động.



**Hình 4. Hệ thống điện cho kéo giãn cột sống**

Các CT 12, 15, 20 ngắt khi phần 2 chân, đầu chạm vào thanh đỡ tương ứng. Lúc đó, xi lanh bị ngắt điện, bảo vệ hệ thống cơ khí. Lúc này, chỉ có thể ấn phím ngược lại để người dùng cần phải tháo dỡ phần khung chân hoặc đầu giường tương ứng.

#### 4. KẾT LUẬN

Việc nghiên cứu, lắp đặt hệ thống an toàn lớp 2 cho giường bệnh đa năng nói trên nhằm hỗ trợ hệ thống an toàn từ phần mềm của hệ thống điện nhằm điều khiển các xi lanh điện, bảo đảm hoạt động của các khớp diễn ra được an toàn cho cả người bệnh và hệ thống cơ khí của giường hơn rất nhiều bởi hệ thống công tắc hành trình và diot rất khó hỏng. Hệ thống đã được chạy thử trên thực tế và cho kết quả như mong đợi. Chúng tôi đã thử nghiệm cả có tải và không tải. Kết quả cho thấy không có bất cứ sự cố nào xảy ra. Việc này có thể bảo đảm thêm một lớp bảo vệ tăng sự an toàn cho người bệnh cũng như độ bền chắc của giường.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Abolfazl Avan , Hadi Digaleh, Mario Di Napoli, et al. (2019), Socioeconomic Status and Stroke Incidence, Prevalence, Mortality, and Worldwide Burden: An Ecological Analysis From the Global Burden of Disease Study 2017, *BMC Med.* 24;17(1):191. doi: 10.1186/s12916-019-1397-3.
- [2] Wenzhi Wang, Bin Jiang, Haixin Sun et al. (2017), Prevalence, Incidence, and Mortality of Stroke in China: Results From a Nationwide Population-Based Survey of 480 687 Adults, *Circulation*, 21;135(8):759-771. doi: 10.1161/Circulationaha.116.025250 .
- [3] Yannick Béjot, Henri Bailly, Jérôme Durier, Maurice Giroud (2016), Epidemiology of Stroke in Europe and Trends for the 21st Century, *Presse Med.* 45 (12 Pt 2):e391-e398. doi: 10.1016/j.lpm.2016.10.003.
- [4] Michael C Dewan, Nishit Mummareddy (2016), *John C Wellons 3rd, Christopher M Bonfield, Epidemiology of Global Pediatric Traumatic Brain Injury: Qualitative Review. World Neurosurg*;91:497-509.e1. doi: 10.1016/j.wneu.2016.03.045. Epub 2016 Mar 25.
- [5] Michael C Dewan, Abbas Rattani, Saksham Gupta, et al (2018), Estimating the Global Incidence of Traumatic Brain Injury, *J Neurosurg*,1;1-18. doi: 10.3171/2017.10.JNS17352. Online ahead of print.
- [6] Nitin B Jain , Gregory D Ayers, Emily N Peterson, et al (2015), Traumatic Spinal Cord Injury in the United States, 1993-2012, *JAMA*. 9;313(22):2236-43. doi: 10.1001/ jama.2015. 6250.
- [7] Julio C Furlan, Brodie M Sakakibara, William C Miller (2013), Global Incidence and Prevalence of Traumatic Spinal Cord Injury, *Can J Neurol Sci.* 2013 Jul;40(4):456-64. doi: 10.1017/ s0317167100014530.
- [8] B B Lee, R A Cripps, M Fitzharris, P C Wing (2012), The Global Map for Traumatic Spinal Cord Injury Epidemiology: Update 2011, Global Incidence Rate. *Spinal Cord*. 2014 Feb;52(2): 110-6. doi: 10.1038/sc.2012.158. Epub 2013 Feb 26.
- [9] Michelle Barakat-Johnson, Michelle Lai, Timothy Wand, et al (2019), The Incidence and Prevalence of Medical Device-Related Pressure Ulcers in Intensive Care: A Systematic Review. *J Wound Care*. 2;28(8):512-521. doi: 10.12968/jowc.2019.28.8.512.
- [10] Wendy P Chaboyer, Lukman Thalib, Emma L Harbeck, et al. Incidence and Prevalence of Pressure Injuries in Adult Intensive Care Patients: A Systematic Review and Meta-Analysis. *Crit Care Med*. 2018 Nov;46(11):e1074-e1081. doi: 10.1097/CCM.0000000000003366.

- [11] <https://suckhoedoisong.vn/moi-nam-uoc-tinh-viet-nam-co-hon-200000-ca-dot-quy-moi-n175429.html>;
- [12] <https://ykhoaphuocan.vn/tin-tuc/y-duoc-hang-tuan/dot-quy-tai-bien-mach-mau-nao-la-gi>;
- [13] <https://www.christopherreeve.org/vi/international/top-paralysis-topics-in-vietnamese/spinal-cord-injury>.

## **SAFE ELECTRIC SYSTEM FOR MULTI MEDICAL BED USED PATIENTS PATIENTS OF JOINT STIFFNEM AND ARTHRITIS**

**Le Viet Bau, Cam Ba Thuc, Nguyen Ngoc Han**

### **ABSTRACT**

*The electronic system should be needed for a multi-function medical bed to ensure its operation automatically. In these beds, in some cases, functions could conflict with each other. This paper presents the electronic system to avoid these conflicts. This ensures the safety for patients as well as the mechanism structure of the bed.*

**Keywords:** *Multi medical bed, safety for medical bed.*

\* Ngày nộp bài: 22/6/2020; Ngày gửi phản biện: 22/6/2020; Ngày duyệt đăng: 28/10/2020

\* Bài báo này là kết quả nghiên cứu từ đề tài Khoa học và Công nghệ cấp tỉnh, tỉnh Thanh Hóa

# MỐI TƯƠNG QUAN GIỮA HÀM LƯỢNG MỘT SỐ KIM LOẠI NẶNG VỚI KÍCH THƯỚC HẠT TRẦM TÍCH BIỂN

Lê Ngọc Anh<sup>1</sup>

## TÓM TẮT

Hàm lượng bốn kim loại nặng bao gồm As, Cd, Cr và Pb đã được xác định trong 72 mẫu trầm tích biển ven bờ đồng bằng sông Cửu Long. Mối tương quan của chúng với kích thước hạt trầm tích đặc biệt là kích thước trung bình (Md) và giá trị trung bình (Mean) đã được nghiên cứu. Kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng, kích thước Md và Mean tương quan chặt chẽ với hàm lượng kim loại nặng. Đối với các hạt bột (bùn) mối tương quan là âm, nói chung khi kích thước hạt tăng, hàm lượng kim loại nặng giảm. Đối với các hạt đất sét, mối tương quan là dương, khi kích thước hạt tăng lên, hàm lượng kim loại nặng tăng.

**Từ khóa:** Kim loại nặng, trầm tích biển, mối tương quan, kích thước hạt trầm tích.

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Những năm gần đây, kim loại nặng trong trầm tích vùng cửa sông, ven biển và rừng ngập mặn đã được nghiên cứu nhiều trên thế giới [1-7]. Ở Việt Nam, cho đến nay nghiên cứu về kim loại nặng chủ yếu được thực hiện ở các vùng đô thị và đất nhiễm phèn [8,9], trong khi vùng đất và trầm tích ven biển còn chưa được quan tâm nhiều. Trầm tích biển ven bờ đồng bằng sông Cửu Long (ĐBSCL), đặc biệt bán đảo Cà Mau là trầm tích rừng ngập mặn, rất giàu sunfua và các chất hữu cơ, thích hợp cho việc lắng đọng và lưu giữ các chất ô nhiễm có nguồn gốc từ đất liền, nhất là các kim loại nặng [7]. Trong bài báo này, chúng tôi trình bày những kết quả nghiên cứu mối tương quan giữa hàm lượng các kim loại As, Cd, Cr và Pb với kích thước hạt trong trầm tích biển ven bờ ĐBSCL.

## 2. THỰC NGHIỆM

Tập hợp 72 mẫu trầm tích bề mặt thu thập được trong khu vực nghiên cứu từ các chuyến khảo sát bằng tàu nghiên cứu biển SONNE của CHLB Đức (SO187-2, SO187-3) nằm trong khuôn khổ hợp tác nghiên cứu biển của Viện Địa chất và Địa vật lý biển (IMGG) với CHLB Đức kéo dài từ cuối năm 1996 đến 2009. Hàm lượng các KLN và kích thước hạt trong các mẫu trầm tích biển nghiên cứu đã được xác định và trình bày chi tiết ở [10].

<sup>1</sup> Trường Đại học Tài nguyên và Môi trường Hà Nội

### 3. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU VÀ THẢO LUẬN

Để đánh giá mối tương quan giữa hàm lượng kim loại nặng với kích thước hạt trầm tích, bài báo sử dụng hệ số tương quan R. Hệ số tương quan (R) là một chỉ số thống kê đo lường mối liên hệ tương quan giữa hai biến số, như hàm lượng kim loại nặng và kích thước hạt. Có hai kiểu tương quan giữa hàm lượng kim loại nặng và kích thước hạt trầm tích được nghiên cứu là tương quan dương (hệ số tương quan  $R > 0$ ) và tương quan âm (hệ số tương quan  $R < 0$ ). Hệ số tương quan R càng gần 1 thì mối tương quan giữa hàm lượng kim loại nặng với kích thước hạt trầm tích càng chặt chẽ.

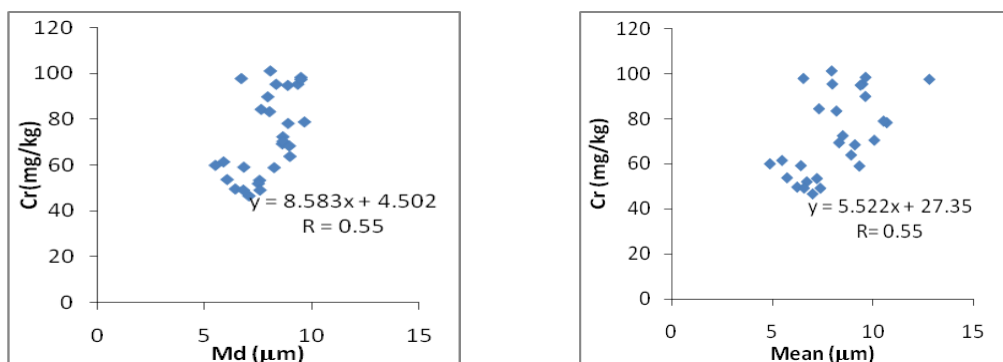
#### 3.1. Mối tương quan giữa hàm lượng KLN với kích thước hạt trong nhóm sét

Nhóm sét gồm các mẫu trầm tích có kích thước hạt Md nằm trong khoảng từ 5,18  $\mu\text{m}$  - 9,67  $\mu\text{m}$  và kích thước hạt Mean từ 4,62  $\mu\text{m}$  - 9,38  $\mu\text{m}$ . Trong tổng số 72 mẫu nghiên cứu có 30 mẫu là sét, chiếm 41,67%. Những kết quả xác định kích thước hạt cho thấy: kích thước hạt Md và Mean của các mẫu trầm tích xấp xỉ nhau. Do đó phân phối của các giá trị Md và Mean trong nhóm sét là phân phối chuẩn. Thêm vào đó hệ số tương quan R giữa Md và Mean là 0,91, phần nào thể hiện mối tương quan chặt chẽ giữa hàm lượng kim loại nặng với kích thước hạt của các mẫu trầm tích trong khu vực nghiên cứu. Các đặc trưng thống kê về hàm lượng kim loại nặng trong nhóm mẫu này được trình bày trong bảng 1.

Phân tích mối quan hệ giữa hàm lượng As với kích thước hạt Md và Mean trong mẫu trầm tích cho thấy chúng có mối tương quan dương. Hệ số tương quan R giữa hàm lượng với kích thước hạt Md và Mean lần lượt là 0,448 và 0,439. Điều này có nghĩa hàm lượng càng cao khi kích thước hạt sét càng lớn. Tương tự như As, hàm lượng Cd cũng có mối tương quan dương với kích thước hạt trong mẫu trầm tích sét. Hệ số tương quan  $R = 0,28$  và  $R = 0,26$  giữa hàm lượng Cd đối với kích thước hạt Md và Mean thể hiện rõ điều này. Tuy nhiên, với hệ số tương quan thấp, hàm lượng Cd thể hiện mối tương quan không chặt chẽ và rõ ràng với giá trị kích thước hạt Md và Mean.

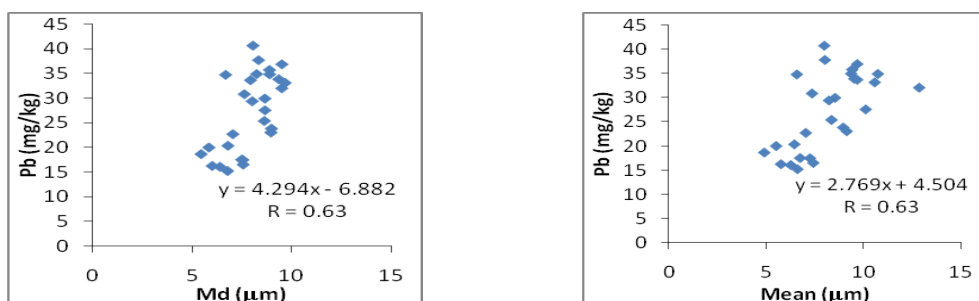
Với độ nhọn (Kurtosis) bằng -1,45 và độ lệch (Skewness) bằng 0,18, hàm lượng Cr trong các mẫu trầm tích nghiên cứu thuộc nhóm sét được coi là phân phối chuẩn. Điều này giải thích tại sao hệ số tương quan của hàm lượng Crom với kích thước hạt Mean và Md của trầm tích lại bằng nhau. Hàm lượng Crom có mối tương quan dương, chặt chẽ với kích thước hạt trong các mẫu trầm tích, với hệ số tương quan  $R = 0,55$ . Trong cùng một mẫu trầm tích, Crom thể hiện mối quan hệ giữa hàm lượng và giá trị kích thước Md và Mean rõ ràng hơn so với các kim loại nặng khác như Asen và Cadimi (hình 1).





**Hình 1. Tương quan giữa hàm lượng Cr với kích thước Md và Mean**

Chì (Pb) là kim loại thể hiện sự tương quan hàm lượng với các kích thước Md và Mean rõ ràng nhất trong số các kim loại nặng nghiên cứu. Độ nhọn bằng -1,46 và độ lệch bằng -0,08 phản ánh sự phân bố xấp xỉ phân phối chuẩn của hàm lượng Pb trong các mẫu trầm tích. Vì vậy, sự tương quan giữa các kích thước Md và Mean với hàm lượng kim loại nặng này là bằng nhau. Với hệ số tương quan  $R = 0,63$  cho thấy mối tương quan thuận chiều và chặt chẽ giữa hàm lượng của Pb với kích thước hạt Md và Mean (hình 2).



**Hình 2. Tương quan giữa hàm lượng Pb với kích thước Md và Mean**

### 3.2. Mối tương quan giữa hàm lượng KLN với kích thước hạt trong nhóm bột

Nhóm bột gồm các mẫu trầm tích có kích thước hạt Md nằm trong khoảng 10,19  $\mu\text{m}$  - 99,18  $\mu\text{m}$  và Mean có giá trị từ 10,12  $\mu\text{m}$  - 95,70  $\mu\text{m}$ . Số lượng mẫu trong nhóm này chiếm 54,17% tổng số mẫu nghiên cứu. Với hệ số tương quan  $R = 0,86$  nên giá trị Md và Mean có mối tương quan chặt chẽ với nhau. Tuy nhiên tương quan này không chặt chẽ bằng mối tương quan giữa kích thước Md và Mean của các mẫu trong nhóm sét. Các đặc trưng thống kê về hàm lượng KLN trong nhóm này được trình bày ở bảng 2.

Trong các mẫu trầm tích thuộc cấp hạt bột, với độ nhọn là -0,38 và độ lệch là 0,38 cho thấy hàm lượng As trong cấp hạt này là phân phối chuẩn. Trong mối tương quan với Md, As thể hiện sự tương quan không rõ ràng với hệ số tương quan  $R = 0,03$ . Trong khi đó, trong mối tương quan với kích thước Mean, hàm lượng Asen thể hiện mối tương quan âm với hệ số tương quan  $R = -0,01$ . So sánh hệ số tương quan giữa hàm lượng As và kích thước hạt Md và Mean từ cấp hạt sét đến cấp hạt bột cho thấy hệ số tương quan giữa kích thước hạt Md và Mean giảm mạnh. Điều này cho thấy, ở cấp hạt kích thước càng lớn thì hàm lượng Asen có xu hướng giảm.

**Bảng 1. Đặc trưng thống kê hàm lượng kim loại nặng trong nhóm sét**

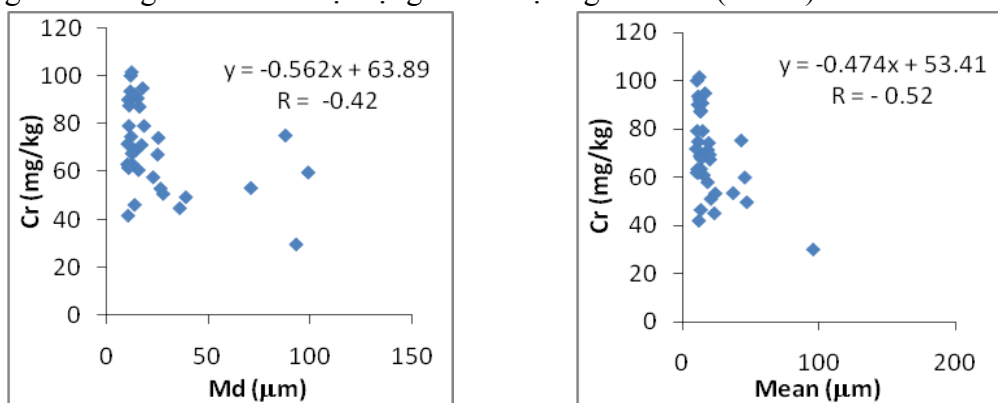
Đặc trưng thống kê	Các kim loại nặng (mg/kg)			
	As	Cd	Cr	Pb
Mean	23,96	0,37	72,46	27,12
Median (Md)	24,13	0,29	69,75	28,49
Standard Deviation	9,48	0,40	18,36	8,01
Kurtosis	0,30	15,00	-1,45	-1,46
Skewness	0,71	3,53	0,18	-0,08
Minmum	9,08	0,07	46,47	15,19
Maximum	47,11	2,16	101,02	40,74
Variance	0,40	1,08	0,25	0,30

**Bảng 2. Đặc trưng thống kê hàm lượng kim loại nặng trong nhóm bột**

Đặc trưng thống kê	Các kim loại nặng (mg/kg)			
	As	Cd	Cr	Pb
Mean	25,01	0,34	70,19	28,83
Median (Md)	23,72	0,32	69,0	29,04
Standard Deviation	5,86	0,18	17,9	6,47
Kurtosis	-0,38	1,80	-0,64	0,70
Skewness	0,38	1,30	-0,08	0,59
Minmum	14,46	0,13	29,81	17,25
Maximum	37,24	0,92	101,69	47,66
Variance	0,23	0,54	0,26	0,22

Cd là kim loại có hàm lượng thấp nhất trong số các kim loại nặng được nghiên cứu. Khác với nhóm sét, trong nhóm bột hàm lượng Cd thể hiện sự phân bố xấp xỉ phân phối chuẩn. Trong mối quan hệ với kích thước Md và Mean, hàm lượng Cd thể hiện mối tương quan âm. Hệ số tương quan  $R = -0,1$  đối với cả kích thước hạt Md và Mean cho thấy mối tương quan này chưa thực sự rõ ràng. Trong nhóm bột, tương tự As khi kích thước hạt càng lớn, thì hàm lượng Cd có xu hướng giảm.

Tương tự trong nhóm sét, hàm lượng Cr trong nhóm bột cũng là phân phối chuẩn. Giá trị Md và Mean xấp xỉ nhau, độ nhọn  $-0,64$  và độ lệch là  $-0,08$  đã chứng minh điều này. Hàm lượng Cr có mối tương quan âm với kích thước Md và Mean. Tuy hệ số tương quan R không thực sự cao ( $-0,42$  và  $-0,52$ ) nhưng Cr đã thể hiện mối tương quan rõ ràng nhất trong số các kim loại nặng khác được nghiên cứu (hình 3).



**Hình 3. Tương quan giữa hàm lượng Cr với kích thước Md và Mean**

Đối với nguyên tố Pb, độ nhọn và độ lệch thấp, phản ánh quy luật phân phối chuẩn của hàm lượng kim loại này. So với các mẫu trầm tích nhóm sét, hàm lượng Pb trung bình cao hơn và phân phối gần với phân phối chuẩn hơn. Tuy nhiên, trong nhóm này Pb lại

không thể hiện sự tương quan chặt chẽ với hệ số tương quan nổi bật như nhóm sét. Trong nhóm bột, Pb thể hiện sự tương quan hàm lượng với kích thước Md và Mean rõ ràng hơn các kim loại As, Cd nhưng lại kém hơn so với kim loại Cr. Hệ số tương quan R giữa hàm lượng Pb với kích thước hạt Md và Mean lần lượt là - 0,2 và - 0,28 đã thể hiện mối tương quan âm. Hàm lượng kim loại này giảm khi kích thước hạt của mẫu trầm tích tăng.

#### 4. KẾT LUẬN

Đối với cấp hạt sét, kích thước hạt Md và Mean có mối tương quan dương và chặt chẽ với hàm lượng các kim loại nặng. Điều này có nghĩa là khi kích thước hạt trầm tích càng lớn thì hàm lượng kim loại nặng trong mẫu trầm tích càng cao. Ngược lại, đối với cấp hạt bột, kích thước hạt Md và Mean có mối tương quan âm với hàm lượng kim loại nặng. Điều đó có nghĩa là hàm lượng kim loại nặng có xu hướng chung giảm khi kích thước cấp hạt bột tăng.

Kết quả nghiên cứu này là những dữ liệu quan trọng đóng góp vào việc nghiên cứu, đánh giá tác động môi trường về sự tích tụ kim loại nặng trong trầm tích vùng cửa sông, ven biển đồng bằng sông Cửu Long nói riêng và trong các mẫu trầm tích nói chung.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Balachandran K. K, C. M Lalu Raj, M Nair, TJoseph, P. Sheepa, P. Venugopal (2005), Heavy metal accumulation in a flow restricted, tropical estuary, *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, 65, pp. 361-370.
- [2] Bryan G. W, Langstone W.J., (1992), Bioavailability, accumulation and effects of heavy metals in sediments with special reference to United Kingdom estuaries: a review, *Environmental Pollution*, 76, pp. 89-131.
- [3] Defew L. H, Mair J. M, Guzman H. M, (2005), An assessment of metal contamination in mangrove sediments and leaves from Punta Mala Bay, Pacific Panama, *Marine Pollution Bulletin* 50, pp. 547-552.
- [4] Hoa Nguyen My, Tran Kim Tinh, Mats Astromand Huynh Tri Cuong (2004), Pollution of Some Toxic Metals in Canal Water Leached Out From Acid Sulphate Soils in the Mekong Delta, Vietnam, *The Second International Symposium on Southeast Asian Water Environment* /December 1-3.
- [5] Sabine D., Lyn C. N., Lorenzo G., Susan B. Marriott, Hans-Joachim S., David J. Bird (2006), Evidence for declining levels of heavy-metals in the Severn Estuary/Bristol Channel, U.K. and their spatial distribution in sediments, *Environmental Pollution* 143, pp. 187-196.
- [6] Saifullah S. M, Sarwat I., Khan S. H, Saleem M, (2004), Land Use - Iron Pollution in Mangrove Habitat of Karachi, Indus Delta, *Earth Interaction*, 8(17).

- [7] Zheng W J, Cheng X Y, Lin P., (1997), Accumulation and biological cycling of heavy metal elements in Rhizophora stylosamangroves in Yingluo Bay, China, *Marine Ecology Progress Series*, 159, pp. 293-301.
- [8] Phuong P. K, C. P. N. Son, J. J. Sauvain, J. Tarradellas, (1998), Contamination by PCB'S, DDT' Sand Heavy Metals in Sediments of Ho Chi Minh City's Canals, Viet Nam, *Bull. Environ. Cotam.Toxicol*, 60, pp. 347-354.
- [9] Rashida Q, Sardar A.S, Naureen A.Q, (2005). A comparative study of heavy metal concentrations in surficial sediments from coastal areas of Karachi, Pakistan, *Marine Pollution Bulletin* 50, pp.583-608.
- [10] Lê Ngọc Anh (2019), Phương pháp xác định hàm lượng một số kim loại nặng và kích thước hạt trong các mẫu trầm tích biển ven bờ, *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Hồng Đức*, số 45, tr.15-21.

## THE CORRELATION BETWEEN THE CONTENTS OF SOME HEAVY METALS WITH COASTAL SEDIMENT PARTICLE SIZE

Le Ngọc Anh

### ABSTRACT

*Contents of four heavy metals including As, Cd, Cr and Pb were determined in 72 coastal sediment samples in the Mekong Delta. Their correlation with sediment particle size in particular Median size (Md) and the Mean has been studied. The research results indicated that, the values of Md and Mean are closely correlated with the contents of heavy metals. For powder samples, the correlation was negative. It means when the particle size increases, the contents of heavy metals decrease. For clay samples, correlation was positive, when the particle size increases, the contents of heavy metal increase.*

**Keywords:** *Heavy metals, sea sediment, correlation, sediment particle size.*

\* Ngày nộp bài: 7/6/2020; Ngày gửi phản biện: 13/6/2020; Ngày duyệt đăng: 28/10/2020

# NGHIÊN CỨU XÂY DỰNG MÔ HÌNH MÔ PHÒNG MÁY BIẾN DÒNG ĐIỆN TỪ KẾT QUẢ THÍ NGHIỆM ĐẶC TÍNH KÍCH THÍCH CỦA MÁY BIẾN DÒNG TRONG THỰC TẾ

Doãn Thanh Cảnh<sup>1</sup>, Phạm Thị Hà<sup>2</sup>

## TÓM TẮT

*Mô hình máy biến dòng điện xây dựng dựa trên đặc tính kích thích trong thí nghiệm thực tế, từ đặc tính kích thích xây dựng đường cong từ hóa của lõi thép máy biến dòng. Kết quả mô phỏng cho thấy đặc tính kích thích của mô hình máy biến dòng điện được xây dựng là phù hợp với đặc tính kích thích trong thực nghiệm. Việc sử dụng mô hình máy biến dòng cho phép phân tích đáp ứng các bảo vệ khi xảy ra bão hòa máy biến dòng.*

**Từ khóa:** *Biến dòng điện, đặc tính, kích thích, mô hình, từ hóa.*

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong sơ đồ bảo vệ các thiết bị điện quan trọng trong hệ thống điện, các tín hiệu đầu vào của bộ bảo vệ được cấp bởi máy biến dòng điện. Chất lượng của máy biến dòng ảnh hưởng trực tiếp tới độ tin cậy của bảo vệ [1]. Máy biến dòng điện là thiết bị điện dùng để biến đổi dòng điện có trị số lớn và điện áp cao xuống dòng điện có trị số tiêu chuẩn 5A hoặc 1A, điện áp an toàn để cung cấp cho mạch đo lường, điều khiển và bảo vệ [2].

Hiện nay, việc mô hình hóa các phần tử trong hệ thống điện đã trở nên cần thiết, nhằm kiểm tra, đánh giá quá trình làm việc của thiết bị cả trước và sau khi áp dụng thực tế. Với công cụ mô phỏng hiện đại như EMTP, Matlab/Simulink, người nghiên cứu có thể xây dựng được mô hình role bảo vệ dựa trên các giải thuật khác nhau, kết hợp với các khối thiết bị có sẵn trong thư viện mô phỏng để tiến hành mô phỏng các dạng sự cố và phân tích sự làm việc của role. Từ các kết quả mô phỏng, người sử dụng có thể đánh giá lượng hóa được ảnh hưởng của các yếu tố khác nhau đến sự làm việc của role kỹ thuật số, từ đó đưa ra các điều chỉnh phù hợp về mặt chỉnh định các thông số cài đặt, cũng như lựa chọn hợp lý các thiết bị đo lường và mạch nhị thứ.

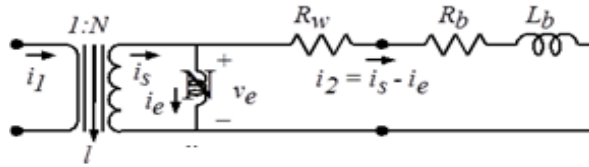
Các nghiên cứu trước đó [1,3,4] sử dụng lại chính các số liệu điển hình của biến dòng điện mà Matlab đưa ra nên chưa phù hợp với yêu cầu thực tế [5]. Để giải quyết vấn đề này, cần thiết phải xây dựng được mô hình máy biến dòng điện từ các kết quả thí nghiệm đặc tính kích thích của máy biến dòng điện. Trong thực tế, số liệu thí nghiệm máy biến dòng tại hiện trường cho ta đặc tính kích thích của máy biến dòng, để mô phỏng lại máy biến dòng trong môi trường MATLAB cần thiết xây dựng đường cong từ hóa của lõi thép máy biến dòng điện.

## 2. MÔ HÌNH MẠCH ĐIỆN THAY THẾ VÀ PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG MÔ HÌNH MÁY BIẾN DÒNG ĐIỆN

Mô hình mạch điện thay thế máy biến dòng gồm: Máy biến dòng lý tưởng nối song song với cuộn cảm phi tuyến đặc trưng bởi mối quan hệ giữa từ thông chính

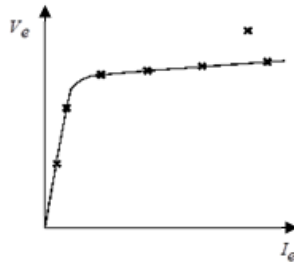
<sup>1,2</sup> Khoa Kỹ thuật Công nghệ, Trường Đại học Hồng Đức

móc vòng qua các cuộn dây, mối quan hệ giữa từ thông và dòng điện trong cuộn dây máy biến dòng [6].



**Hình 1. Mô hình mạch thay thế máy biến dòng điện**

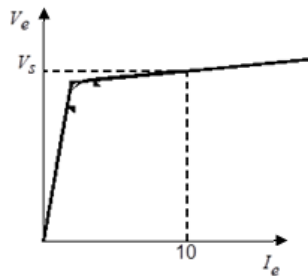
Đường cong kích thích của máy biến dòng là đường cong biểu diễn mối quan hệ giữa giá trị hiệu dụng của điện áp kích thích và dòng điện kích thích của máy biến dòng điện. Đường cong kích thích được thí nghiệm và cung cấp bởi nhà sản xuất biểu diễn trên trục đồ thị log-log.



**Hình 2. Đường cong kích thích máy biến dòng điện**

Để xây dựng mô hình máy biến dòng điện cần đơn giản hóa đường cong kích thích máy biến dòng và xác định được các tham số của đặc tính từ hóa máy biến dòng điện.

Theo [4,6] ta đơn giản hóa đặc tính kích thích như hình 3.



**Hình 3. Đặc tính đơn giản hóa của đường cong kích thích**

Để có được đặc tính từ hòa lõi thép máy biến dòng điện cần xác định được giá trị của hệ số A của phương trình  $i_e = A \cdot \text{sgn}(\lambda) \cdot |\lambda|^s$  (1)

Mối quan hệ giữa từ thông liên kết ( $\lambda$ ) và điện áp kích thích tức thời ( $v_s$ ) theo định luật Faraday, khi bỏ qua điện trở không đáng kể của cuộn dây thứ cấp ( $R_w$ ) của máy biến dòng ta có:

$$v_e = \frac{d\lambda}{dt} \quad (2)$$

$$\text{Giả thiết với điện áp kích thích dạng sin: } v_e = \sqrt{2}V_e \cos(\omega t) \quad (3)$$

$$\text{Và } \lambda = \int v_e dt = \int \sqrt{2}V_e \cos(\omega t) dt = \sqrt{2}V_e \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \quad (4)$$

Dòng điện kích thích là không sin, hàm lũy thừa bậc s của  $\lambda$

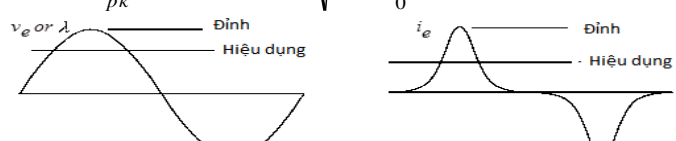
$$i_e = A\lambda^s = A \left[ \frac{\sqrt{2}V_e}{\omega} \sin(\omega t) \right]^s = A \left[ \frac{\sqrt{2}V_e}{\omega} \right]^s \sin^s(\omega t) \quad (5)$$

Giá trị hiệu dụng được định nghĩa

$$I_e = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i_e^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A^2 \left[ \frac{\sqrt{2}V_e}{\omega} \right]^{2s} \sin^{2s}(\omega t) dt} = A \left[ \frac{\sqrt{2}V_e}{\omega} \right]^s \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2s}(\omega t) dt} \quad (6)$$

Định nghĩa tỷ số giữa giá trị hiệu dụng và biên độ là  $RP = \frac{rms}{peak}$ .

Với hàm sin thì  $RP=0.7071$ , với  $i_e$  giá trị của  $RP$  được xác định như sau

$$RP = \frac{\sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_{pk}^2 \sin^{2s}(\omega t) dt}}{I_{pk}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2s}(\omega t) dt} \quad (7)$$


**Hình 4.** So sánh biên độ và giá trị hiệu dụng của sóng dạng sin và không sin

Thay vào biểu thức 5 ta có

$$I_e = A \left[ \frac{\sqrt{2}V_e}{\omega} \right]^s RP \quad (8)$$

Ta sẽ xác định hệ số A qua điểm  $I_e=10, V_e=V_s$

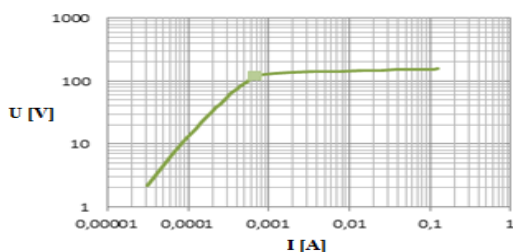
$$10 = A \left[ \frac{\sqrt{2}V_s}{\omega} \right]^s RP; \quad A = \frac{10\omega^s}{(\sqrt{2}V_s)^s} \frac{1}{RP} \quad (9)$$

Thay vào biểu thức (1) có mối quan hệ giữa  $\lambda$  và  $i_e$   $i_e = \text{sgn}(\lambda) \frac{10\omega^s}{(\sqrt{2}V_s)^s} \frac{1}{RP} \cdot |\lambda|^s$  (10)

### 3. XÂY DỰNG MÔ HÌNH MÁY BIẾN DÒNG TỪ KẾT QUẢ THÍ NGHIỆM

#### 3.1. Thông số máy biến dòng từ thí nghiệm

Máy biến dòng được mô phỏng có thông số 400/5 loại 10P20 kết quả thí nghiệm như sau:



**Hình 5.** Đặc tính kích thích thí nghiệm của máy biến dòng 10P20, 400/5

**Bảng 1. Thông số thí nghiệm của máy biến dòng điện**

Điện áp (V)	155.3475	154.2525	153.9675	153.0705	152.0925	150.867	149.1345	147.015
Dòng điện (A)	0.1253274	0.1102412	0.0903417	0.0706133	0.0526517	0.037191	0.0244536	0.014571
Điện áp (V)	144.3465	140.9745	136.761	132.0855	127.2285	122.283	117.3015	112.3275
Dòng điện (A)	0.0076347	0.0035771	0.0018111	0.0011504	0.0008784	0.0007518	0.0006782	0.0006297
Điện áp (V)	107.3175	102.321	97.3365	92.328	87.327	82.338	77.322	72.303
Dòng điện (A)	0.0005991	0.000569	0.0005339	0.000504	0.0004733	0.0004413	0.0004131	0.0003875
Điện áp (V)	67.32	62.2995	57.2775	52.2855	47.271	42.2595	37.2525	32.2365
Dòng điện (A)	0.0003611	0.0003365	0.0003135	0.0002904	0.0002673	0.0002438	0.0002199	0.0001959
Điện áp (V)	27.2415	22.2255	17.217	12.2085	7.1925	2.175		
Dòng điện (A)	0.0001725	0.0001482	0.0001224	0.0000948	0.0000651	0.0000309		

Từ thông số thí nghiệm và đặc tính ở hình 5 xác định được  $V_s = 187.05(V)$ , tham số  $S = 16$ .

### 3.2 Xác định tham số A

Thay vào biểu thức (7) và (9) ta có:

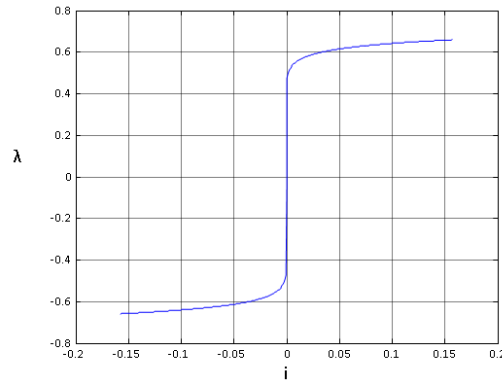
$$RP = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{32}(\omega t) dt} \quad A = \frac{10(100.II)^{16}}{(\sqrt{2} * 187.05)^{16}} \frac{1}{RP}$$

Kết quả tính toán được thực hiện trong MATLAB/SIMULINK với sơ đồ mô phỏng gồm máy biến dòng được cấp nguồn phía thứ cấp bởi nguồn dòng điều chỉnh tăng dần dòng điện, phía sơ cấp máy biến dòng để hở mạch, đo điện áp phía thứ cấp [7].



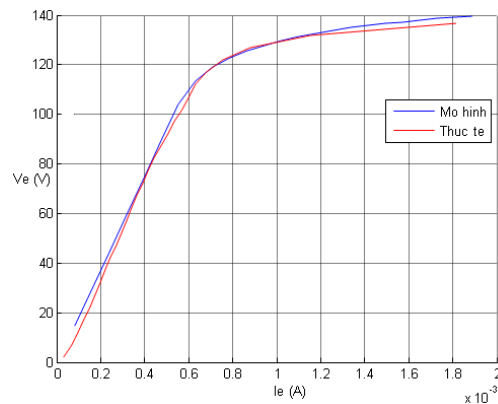
#### 4. KẾT QUẢ MÔ PHỎNG

Máy biến dòng điện sử dụng trong mô phỏng có thông số  $R_w = 02\Omega$ ,  $L_w = 0.005H$ .



**Hình 6. Đặc tính từ hóa của máy biến dòng điện**

Kết quả mô phỏng cho thấy đặc tính từ hóa của máy biến dòng điện thực tế và mô hình là phù hợp với nhau.



**Hình 7. So sánh đường cong kích thích máy biến dòng trong thí nghiệm thực tế và khi sử dụng mô hình xây dựng trên MATLAB**

Điểm gãy của đồ thị trong thực tế tại điểm  $I_k = 0.0006952$  (A),  $V_k = 118.4865$  (V) trong mô hình xây dựng có  $I_k = 0.0006948$  (A),  $V_k = 112.9732$  (V). Mô hình là phù hợp, chấp nhận được.

#### 5. KẾT LUẬN

Bài báo này nghiên cứu xây dựng mô hình máy biến dòng điện trong môi trường MATLAB/SIMULINK từ kết quả thí nghiệm thực tế và đã thực hiện xây dựng được mô hình máy biến dòng điện có đáp ứng đúng với đặc tính kích thích khi thí nghiệm. Với kết quả mô hình máy biến dòng được xây dựng có thể sử dụng các bản ghi sự cố, kiểm nghiệm lại sự làm việc của bảo vệ so lệch máy biến áp cũng như các bảo vệ khác khi xảy ra bão hòa máy biến dòng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Trần Đình Long (2009), *Bảo vệ các hệ thống điện*, Nxb. Khoa học Kỹ thuật, Hà Nội.
- [2] Phạm Văn Chới (2012), *Giáo trình Khí cụ điện*, Nxb. Giáo dục Việt Nam, Hà Nội.
- [3] R.P.Pandey, R.N.Patel (2014), A CT Saturation Detection Algorithm Using Secondary Current Third Difference Function, *International Journal of Engineering Development and Research*, 2 (2), pp. 2774 - 2779.
- [4] Thilepa R, Yogaraj J, Vinoth Kumar C S, Santhosh P K (5/2016), Saturation Analysis on Current Transformer, *International Journal of Future Innovative Science and Technology*, 2 (2).
- [5] Lê Kim Hùng và cộng sự (2019), Thử nghiệm và đánh giá các yếu tố ảnh hưởng đến mức độ bão hòa của biến dòng điện, *Tạp chí Khoa học và Công nghệ*, Trường Đại học Bách khoa Đà Nẵng, tr.129 - 134.
- [6] PSRC, CT SAT Calculator.
- [7] Nguyễn Phùng Quang (2006), *Matlab & Simulink dành cho kỹ sư điều khiển tự động*, Nxb. Khoa học Kỹ thuật, Hà Nội.

**STUDY OF CURRENT TRANSFORMER MODEL BASED ON THE  
STIMULATING PROPERTIES IN EXPERIMENTS**

**Doan Thanh Canh, Pham Thi Ha**

**ABSTRACT**

*Current transformer model is built based on the stimulating properties in experiments, from the stimulating properties to build the magnetization curve of the transformer core steel. The simulation results show that the stimulating properties of the current transformer model are consistent with the experimental stimulating properties. This model allows to analyze the response of the saturation transformer protection.*

**Keywords:** *Current transformer, characteristics, stimulation, model, magnetization.*

\* Ngày nộp bài: 1/7/2020; Ngày gửi phản biện: 27/7/2020; Ngày duyệt đăng: 28/10/2020

# KHÔI PHỤC VÀ XẤP XỈ HÀM SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP TUYẾN TÍNH TRONG KHÔNG GIAN BESOV

Nguyễn Mạnh Cường<sup>1</sup>, Bùi Khắc Thiện<sup>2</sup>

## TÓM TẮT

*Chúng tôi nghiên cứu khôi phục và xấp xỉ lớp hàm số không tuần hoàn thuộc không gian Besov  $B_{p,\theta}^\Omega$  có độ trơn đẳng hướng bằng phương tuyến tính không thích nghi. Xây dựng được phương pháp tuyến tính  $L_n(X_n, \Phi_n, f)$  dựa trên giá trị lấy mẫu mà cụ thể trong bài báo này là các toán tử  $R_m(f)$ , đánh giá sai số xấp xỉ của phương pháp qua đại lượng đặc trưng  $\varrho_n$ .*

**Từ khóa:** Biểu diễn bán nội suy, không gian Besov, phương pháp tuyến tính.

### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Như chúng ta đã biết các phương pháp hiện đại của toán học được ứng dụng rất nhiều trong lĩnh vực xử lý tín hiệu, xử lý ảnh và thị giác máy tính. Bài toán khôi phục tín hiệu và loại nhiễu là một bài toán hết sức quan trọng trong lĩnh vực xử lý tín hiệu và xử lý ảnh, vì trong thực tế không có một loại máy nào có thể cho ta thông tin chính xác của tín hiệu, cũng như nhiễu luôn xuất hiện trong quá trình truyền tải, số hóa, nhiễu xuất hiện do điều kiện tự nhiên. Sự phụ thuộc của chất lượng tín hiệu và ảnh vào công nghệ xử lý thông tin đòi hỏi phải phát triển rất mạnh và có hiệu quả các thuật toán xử lý tín hiệu, xử lý ảnh và ứng dụng của chúng [1,2]. Khôi phục hàm số từ giá trị lấy mẫu tối ưu là một trong những bài toán cơ bản của lý thuyết xấp xỉ, được nhiều nhà toán học quan tâm vì ý nghĩa lý thuyết cũng như ứng dụng của nó. Khôi phục hàm số từ giá trị lấy mẫu bằng phương pháp tuyến tính là cách tiếp cận truyền thống được nhiều nhà toán học nghiên cứu, tuy nhiên cho đến nay nó vẫn không mất tính thời sự vì có nhiều ứng dụng. Bài báo nghiên cứu khôi phục và xấp xỉ hàm số bằng phương pháp tuyến tính không thích nghi. Khôi phục và xấp xỉ hàm số bằng phương pháp tuyến tính đã được nhiều nhà toán học nghiên cứu và có nhiều công trình được công bố. Trong [3] các tác giả đã nghiên cứu khôi phục và xấp xỉ hàm số bằng phương pháp tuyến tính cho lớp hàm số tuần hoàn thuộc không gian Besov  $B_{p,\theta}^\omega$  với modul trơn đẳng hướng, các tác giả đã xây dựng được phương pháp tuyến tính và đánh giá được tốc độ hội tụ của phương pháp đó. GS.TSKH Đinh Dũng đã nghiên cứu khôi phục và xấp xỉ hàm số cho lớp hàm số không tuần hoàn bằng phương pháp tuyến tính trong các không gian Besov  $B_{p,\theta}^\alpha$ ,  $B_{p,\theta}^{\alpha,\beta}$  và  $B_{p,\theta}^\Omega$  với modul trơn không đẳng hướng, xây dựng được các phương

<sup>1</sup> Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức

<sup>2</sup> Khoa Kỹ thuật Công nghệ, Trường Đại học Hồng Đức

pháp tuyến tính và đánh giá tiệm cận tốc độ hội tụ của phương pháp [6,7]. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ nghiên cứu vấn đề khôi phục và xấp xỉ hàm số không tuần hoàn bằng phương pháp tuyến tính trong không gian Besov  $B_{p,\theta}^\Omega$  với modul trơn đẳng hướng, chúng tôi xây dựng được phương pháp tuyến tính bởi các B-spline và đánh giá tiệm cận được tốc độ hội tụ của phương pháp.

**Định nghĩa 1.** Cho  $f \in L_p(I^d)$ , toán tử sai phân cấp  $l$  được định nghĩa bởi

$$\Delta_h^l f(x) := \sum_{j=0}^l (-1)^{l-j} \binom{l}{j} f(x + jh).$$

**Định nghĩa 2.** Nếu  $f \in L_p(I^d)$  thì:  $\omega_l(f, t)_p := \sup_{|h| < t} \|\Delta_h^l f\|_{p, I^d(lh)}$  được gọi là modul trơn cấp  $l$  của  $f$ , ở đây  $I^d(lh) := \{x : x, x + lh \in I^d\}$ .

Cho hàm số  $\Omega: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  thỏa mãn các điều kiện

(i)  $\Omega(t) > 0, \forall t > 0,$

(ii)  $\Omega(t) \leq c.\Omega(t'), \forall t, t' \in \mathbb{R}_+, t \leq t',$

(iii)  $\forall \gamma \geq 1, \exists C' = C'(\gamma)$  sao cho  $\Omega(\gamma t) \leq C'.\Omega(t), t \in \mathbb{R}_+.$

Chú ý rằng điều kiện (iii) chỉ cần thỏa mãn với một số  $\gamma > 1$  cố định (chẳng hạn  $\gamma = 2$ ).

**Định nghĩa 3.** Cho  $0 < p, \theta \leq \infty$  không gian Besov  $B_{p,\theta}^\Omega$  được định nghĩa là tập hợp các hàm  $f \in L_p(I^d)$  sao cho chuẩn Besov sau là hữu hạn

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} := \|f\|_p + |f|_{B_{p,\theta}^\Omega}, \text{ ở đây } |f|_{B_{p,\theta}^\Omega}$$

là nửa chuẩn Besov, xác định bởi

$$|f|_{B_{p,\theta}^\Omega} := \begin{cases} \left( \int_I \left\{ \omega_l(f, t)_p / \Omega(t) \right\}^\theta \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\theta}} & \theta < \infty \\ \sup_{t \in I} \left\{ \omega_l(f, t)_p / \Omega(t) \right\} & \theta = \infty. \end{cases}$$

Kí hiệu  $U_{p,\theta}^\Omega$  là hình cầu đơn vị của không gian  $B_{p,\theta}^\Omega$ .

## 2. BIỂU DIỄN HÀM SỐ QUA CÁC B-SPLINE

**Định nghĩa 4.** Ký hiệu  $N_r$  là B-spline chuẩn tắc bậc  $r$  với các nút tại các điểm  $0, 1, \dots, r$  được xác định như sau:  $N_1$  là hàm đặc trưng trên nửa khoảng  $[0, 1)$ ; với  $r \geq 2, N_r$  được định nghĩa bởi tích chập

$$N_r(x) := \int_{-\infty}^{\infty} N_{r-1}(x-y)N_1(y)dy.$$

Đặt  $M_r(x) := N_r(x + \frac{r}{2})$  được gọi là B-spline trung tâm bậc  $r$ .

Cho một số nguyên dương  $r$ , gọi  $M$  là một B-spline trung tâm bậc  $2r$  với giá  $[-r, r]$  và các nốt là các điểm nguyên  $-r, \dots, 0, \dots, r$ . Định nghĩa  $d$ -biến B-spline như sau

$$M(x) := \prod_{i=1}^d M(x_i), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_d), \quad (2.1)$$

và định nghĩa B spline sóng nhỏ:  $M_{k,s}(x) := M(2^k x - s)$ ,

Cho một số không âm  $k$  và  $s \in \mathbb{Z}^d$ . Ký hiệu  $M$  là tập hợp tất cả  $M_{k,s}$  không triệt tiêu trên  $I^d$ . Cho  $\lambda = \{\lambda(j)\}_{j \in P(\mu)}$  là dãy chặn hữu hạn, tức là  $\lambda(j) = \lambda(-j)$ , ở đây  $P^d(\mu) := \{j \in \mathbb{Z}^d : |j| \leq \mu\}$  và  $\mu \geq r-1$ . Chúng ta định nghĩa toán tử tuyến tính  $Q$  cho hàm  $f$  trên  $\mathbb{R}^d$  bởi

$$Q(f, x) := \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \Lambda(f, s) M(x - s), \quad (2.2)$$

Ở đây: 
$$\Lambda(f, s) := \sum_{j \in P^d(\mu)} \lambda(j) f(s - j). \quad (2.3)$$

Khi đó, từ định nghĩa của B-spline suy ra toán tử  $Q$  bị chặn trên  $C(\mathbb{R}^d)$  và  $\|Q(f)\|_{C(\mathbb{R}^d)} \leq \|\Lambda\| \|f\|_{C(\mathbb{R}^d)}$ , trong đó  $\|\Lambda\| = \sum_{j \in P^d(\mu)} |\lambda(j)|$ .

Ký hiệu  $\mathcal{P}_{2r-1}$  là tập hợp các đa thức đại số có bậc không vượt quá  $2r - 1$ . Một toán tử  $Q$  được xác định từ (2.2 - 2.3) tái tạo lại  $\mathcal{P}_{2r-1}$ , tức là  $Q(p) = p, p \in \mathcal{P}_{2r-1}$ , được gọi là một toán tử giả nội suy trong  $C(\mathbb{R}^d)$ .

Giả sử  $Q$  là một toán tử giả nội suy từ (2.2 - 2.3), cho  $h > 0$  và một hàm  $f$  xác định trên  $\mathbb{R}^d$ , chúng ta xác định toán tử  $Q(., h)$  bởi  $Q(f; h) := \sigma_h \circ Q \circ \sigma_{1/h}(f)$ , ở đây  $\sigma_h(f, x) = f(x/h)$ . Từ định nghĩa của  $Q(f, h)$ , ta có  $Q(f, x; h) = \sum_k \Lambda(f, k; h) M(h^{-1}x - k)$ ,

với 
$$\Lambda(f, k; h) = \sum_{j \in P^d(\mu)} \lambda(j) f(h(k - j)).$$

Toán tử  $Q(., h)$  có các tính chất tương tự như toán tử  $Q$ , cũng được gọi là một toán tử giả nội suy trong  $C(\mathbb{R}^d)$ . Nhưng  $Q(., h)$  không được định nghĩa cho  $f$  trên  $I^d$ , và do đó không khôi phục được hàm số  $f$  với các điểm lấy mẫu trong  $I^d$ . Một cách tiếp cận được GS.TSKH Đinh Dũng đề xuất trong [4,5] để xây dựng toán tử giả nội suy cho một hàm số trên  $I^d$  là mở rộng nó bằng các đa thức nội suy Lagrange.

Cho một số nguyên không âm  $k$ , đặt  $x_j = j2^{-k}, j \in \mathbb{Z}$ . Nếu  $f$  là một hàm số trên  $I$ , Ký hiệu  $U_k(f), V_k(f)$  lần lượt là các đa thức nội suy Lagrange tại  $2r$  điểm bên trái  $x_0, x_1, \dots, x_{2r-1}$  và  $2r$  điểm bên phải  $x_{2^k-2r+1}, x_{2^k-2r+3}, \dots, x_{2^k}$  trên đoạn  $I$  được xác định bởi:

$$U_k(f, x) := f(x_0) + \sum_{s=1}^{2r-1} \frac{2^{sk} \Delta_{2^{-k}}^s f(x_0)}{s!} \prod_{j=0}^{s-1} (x - x_j),$$

$$V_k(f, x) := f(x_{2^k-2r+1}) + \sum_{s=1}^{2r-1} \frac{2^{sk} \Delta_{2^{-k}}^s f(x_{2^k-2r+1})}{s!} \prod_{j=0}^{s-1} (x - x_{2^k-2r+1+j}).$$

Hàm số  $\bar{f}$  được định nghĩa là hàm số mở rộng của  $f$  trên  $\mathbb{R}$  như sau:

$$\bar{f}_k(x) = \begin{cases} U_k(f, x), & x < 0, \\ f(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ V_k(f, x), & x > 1. \end{cases}$$

Nếu  $f$  liên tục trên  $I$  thì  $\bar{f}$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Giả sử  $Q$  là một toán tử giả nội suy (2.2 - 2.3) trong  $C(\mathbb{R})$ . Chúng ta xây dựng toán tử  $Q_k$  xác định bởi

$$Q_k(f, x) := Q(\bar{f}_k, x; 2^{-k}), \quad x \in I,$$

với hàm  $f$  trên  $I$ . Khi đó,

$$Q_k(f, x) = \sum_{s \in J(k)} a_{k,s}(f) M_{k,s}(x), \quad \forall x \in I,$$

Trong đó:  $J(k) := \{s \in \mathbb{Z}, -r < s < 2^k + r\}$

và:  $a_{k,s}(f) := \Lambda(\bar{f}_k, s; 2^{-k}) = \sum_{|j| \leq \mu} \lambda(j) \bar{f}_k(2^{-k}(s - j))$ .

Chúng ta nhận thấy  $Q_k$  cũng là toán tử giả nội suy trên  $C(I)$ . Cho  $f$  là hàm số trên  $I^d$ . Giả sử  $Q$  là một toán tử giả nội suy có dạng (2.2)-(2.3) trong  $C(\mathbb{R}^d)$ . Chúng ta xây dựng toán tử nhiều biến  $Q_k$  được xác định bởi

$$Q_k(f, x) = \sum_{s \in J(k)} a_{k,s}(f) M_{k,s}(x), \quad \forall x \in I^d,$$

ở đây  $J(k) := \{s \in \mathbb{Z}^d, -r < s_i < 2^{k+k_0} + r, i = 1, 2, \dots, d\}$  là tập hợp các giá trị của  $s$  sao cho  $M_{k,s}$  không đồng nhất bằng 0 trên  $I^d$ . Chú ý rằng

$$a_{k,s}(f) = a_{k,s_1}((a_{k,s_2}(\dots a_{k,s_d}(f))), \quad (2.4)$$

Ở đây các hàm hệ số  $a_{k,s_i}$  được áp dụng tương tự cho hàm số một biến khi xem  $f$  là hàm số một biến  $x_i$  với các biến còn lại cố định.

Tương tự như toán tử  $Q$  và  $Q(\cdot; h)$ , thì toán tử  $Q_k$  là tuyến tính bị chặn trên  $C(I^d)$  và tái tạo  $\mathcal{P}_{2r-1}$ . Đặc biệt, chúng ta có:

$$\|Q_k(f)\|_{C(\mathbb{R}^d)} \leq C \|\Lambda\| \|f\|_{C(\mathbb{R}^d)}, \quad (2.5)$$

Với mỗi  $f \in C(I^d)$ , với hằng số  $C$  không phụ thuộc  $k$  và  $Q_k(\varphi^*) = \varphi, \forall \varphi \in \mathcal{P}_{2r-1}$ , ở đây  $\varphi^*$  là hạn chế của  $\varphi$  trên  $I^d$ . Toán tử nhiều biến  $Q_k$  được gọi là toán tử giả nội suy trên  $C(I^d)$ .

Cho  $k \in \mathbb{Z}_+$ , đặt  $q_k := Q_k - Q_{k-1}$  với quy ước  $Q_{-1}(f) = 0$ . Ta định nghĩa  $Q_k$  bởi  $Q_k = \sum_{k' \leq k} q_{k'}$ .

**Bổ đề 1.** Giả sử  $f \in C(I^d)$ . Khi đó, ta có

$$\|f - Q_k(f)\|_\infty \leq C\omega_{2r}(f, 2^{-k})_\infty. \quad (2.6)$$

Do đó: 
$$\|f - Q_k(f)\|_\infty \rightarrow 0, k \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

*Chứng minh.*

Bất đẳng thức (2.6) được suy ra từ (2.29)-(2.31) trong [4] và bất đẳng thức (2.5).

Cho bất kỳ  $f \in C(I^d)$ , từ (2.7)  $f$  có thể biểu diễn thành chuỗi

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} q_k(f), \quad (2.8)$$

$$\text{với } q_k(f) = \sum_{s \in J(k)} c_{k,s}(f)M_{k,s},$$

Chuỗi này hội tụ theo chuẩn trong  $L_\infty(I^d)$ , ở đây  $c_{k,s}$  là các phiếm hàm hệ số của  $f$ , được xác định như dưới đây. Đầu tiên xác định  $c_{k,s}$  cho hàm số một biến ( $d = 1$ ). Cụ thể

$$c_{k,s}(f) := a_{k,s}(f) - a'_{k,s}(f), k \geq 0,$$

$$a'_{k,s}(f) := 2^{-2r+1} \sum_{(m,j) \in C_r(k,s)} \binom{2r}{j} a_{k-1,m}(f), k > 0, a'_{0,s}(f) := 0,$$

Ở đây  $C_r(k,s) := \{(m,j) : 2m + j - r = s, m \in J(k-1), 0 \leq j \leq 2r\}$ , với  $k > 0, C_r(0,s) := \{0\}$ .

Trong trường hợp hàm nhiều biến, chúng ta xác định  $c_{k,s}$  tương tự như (2.4) cho  $a_{k,s}$ , tức là  $c_{k,s}(f) = c_{k,s_1}((c_{k,s_2}(\dots c_{k,s_d}(f)))$ , ở đây các hàm hệ số  $c_{k,s_i}$  áp dụng cho hàm số một biến  $f$  khi xem  $f$  là hàm số với biến  $x_i$  với các biến còn lại cố định.

Ký hiệu  $A_n(f) \ll B_n(f)$  nếu  $A_n(f) \leq C.B_n(f)$  ở đây  $C$  là hằng số độc lập với  $n$  và  $f \in W$ ;  $A_n(f) \asymp B_n(f)$  nếu  $A_n(f) \ll B_n(f)$  và  $B_n(f) \ll A_n(f)$ .

Cho  $k \in \mathbb{Z}_+$  ký hiệu  $\Sigma(k)$  là không gian các B-splines  $M_{k,s}, s \in J(k)$ . Nếu  $0 < p \leq \infty$  thì  $g \in \Sigma(k)$  được biểu diễn bởi  $g = \sum_{s \in J(k)} a_s M_{k,s}$  và đẳng thức sau (xem [5])

$$\|g\|_p \asymp 2^{-dk/p} \|\{a_s\}\|_{p,k}, \quad (2.9)$$

Ở đây  $\|\{a_s\}\|_{p,k} := \left( \sum_{s \in J(k)} |a_s|^p \right)^{1/p}$ , với vế phải thay bằng supremum khi  $p = \infty$ .

Từ (2.9) cho hàm số liên tục  $f$  trên  $I^d$ , chúng ta có các nửa chuẩn sau đây tương đương với nhau

$$B_2(f) := \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \left\{ \|q_k(f)\|_p / \Omega(2^{-k}) \right\}^\theta \right)^{1/\theta}$$

$$B_3(f) := \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \left\{ 2^{-dk/p} \|\{c_{k,s}(f)\}\|_{p,k} / \Omega(2^{-k}) \right\}^\theta \right)^{1/\theta}$$

Định lý sau đây đã được chứng minh trong [7,8].

**Định lý 1.** Cho  $0 < p, \theta \leq \infty$  và hàm số  $\Omega$  sao cho tồn tại các hằng số  $\mu, \rho > 0$  và  $C_1, C_2$  thỏa mãn

$$\Omega(t).t^{-\mu} \leq C_1 \Omega(t').t'^{-\mu}, t \leq t'; t, t' \in I, \quad (2.10)$$

$$\Omega(t).t^{-\rho} \geq C_2 \Omega(t').t'^{-\rho}, t \leq t'; t, t' \in I.$$

Khi đó, chúng ta có

i) Nếu  $\mu > \frac{d}{p}$  và  $\rho < 2r$  thì một hàm số  $f \in B_{p,\theta}^\Omega$  có thể biểu diễn thành chuỗi (2.8)

$$\text{và } B_2(f) \ll \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega}. \quad (2.11)$$

ii) Nếu  $\rho < \min(2r, 2r-1+\frac{1}{p})$  và  $g$  là một hàm số được biểu diễn bởi  $g = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} g_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \sum_{s \in J(k)} c_{k,s} M_{k,s}$

$$\text{thỏa mãn: } B_4(g) := \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \left\{ \|g_k\|_p / \Omega(2^{-k}) \right\}^\theta \right)^{1/\theta} < \infty, \text{ thì } g \in B_{p,\theta}^\Omega \text{ và } \|g\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \ll B_4(g).$$

iii) Nếu  $\mu > \frac{d}{p}$  và  $\rho < \min(2r, 2r-1+\frac{1}{p})$  thì một hàm số  $f$  xác định trên  $I^d$  thuộc  $B_{p,\theta}^\Omega$  khi và chỉ khi  $f$  có thể biểu diễn thành chuỗi có dạng (2.8) thỏa mãn điều kiện (2.11). Hơn nữa, chuẩn  $\|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega}$  là tương đương với chuẩn  $B_2(f)$ .

**Hệ quả 1.** Cho  $0 < p, \theta \leq \infty$  và  $\Omega$  thỏa mãn các giả thuyết của ý (ii) trong Định lý 1. Khi đó, với bất kỳ  $k \in \mathbb{Z}_+$ , chúng ta có:  $\|g\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \ll \|g_k\|_p / \Omega(2^{-k})$ ,  $g \in \Sigma(k)$ .

### 3. KHÔI PHỤC HÀM SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP TUYẾN TÍNH

**Định nghĩa 5.** Cho  $X_n = \{x^j\}_{j=1}^n$  là  $n$  điểm của  $I^d$ ,  $\Phi_n = \{\varphi_j\}_{j=1}^n$  là họ  $n$  hàm số thuộc không gian  $L_q(I^d)$ . Để khôi phục hàm số  $f$  được xác định trên  $I^d$  từ các giá trị lấy mẫu  $f(x^1), \dots, f(x^n)$ , chúng ta định nghĩa phương pháp tuyến tính dựa trên giá trị lấy mẫu  $L_n(X_n, \Phi_n, \cdot)$  bởi công thức sau đây

$$L_n(X_n, \Phi_n, f) := \sum_{j=1}^n f(x^j) \varphi_j \quad (3.1)$$

Cho  $W \subset L_q(I^d)$ . Chúng ta nghiên cứu tính tối ưu của phương pháp tuyến tính có dạng (1.4) để khôi phục hàm số  $f \in W$  từ  $n$  giá trị lấy mẫu trên bằng đại lượng

$$\text{sau } \varrho_n(W, L_q(I^d)) := \inf_{X_n, \Phi_n} \sup_{f \in W} \|f - L_n(X_n, \Phi_n, f)\|_q.$$



**Định nghĩa 6.** Cho số nguyên không âm  $m$ , đặt  $K(m) := \{(k, s) : k \in \mathbb{Z}_+, k \leq m, s \in I^d(k)\}$ , ở đây  $I^d(k) = \{s \in \mathbb{Z}_+^d : 0 \leq s_i \leq 2^k, i = 1, \dots, d\}$  và ký hiệu  $M(m)$  là tập hợp gồm các B-splines  $M_{k,s}, k \leq m, s \in J(k)$ . Chúng ta định nghĩa toán tử  $R_m$  của các hàm số  $f \in B_{p,\theta}^\Omega$  bởi  $R_m(f) := \sum_{k \leq m} q_k(f) = \sum_{k \leq m} \sum_{s \in J(k)} c_{k,s}(f) M_{k,s}$ , và lưới  $G(m)$  của các điểm trong  $I^d$ ,  $G(m) := \{2^{-k} s : (k, s) \in K(m)\}$ .

**Bổ đề 2.** Toán tử  $R_m$  xác định một phương pháp tuyến tính có dạng (3.1) trên lưới  $G(m)$ . Cụ thể,

$$R_m(f) = L_n(X_n, \Phi_n, f) = \sum_{(k,s) \in K(m)} f(2^{-k} s) \psi_{k,s},$$

Ở đây  $X_n := G(m), \Phi_n := \{\psi_{k,s}\}_{(k,s) \in K(m)}, n := |G(m)| = \sum_{k \leq m} (2^k + 1)^d, \psi_{k,s}$  được xác định là tổ hợp tuyến tính của không quá  $N$  các B-splines  $M_{k,s} \in M(m)$  với  $N$  độc lập với  $k, j, m$  và  $f$ .

**Định lý 2.** Cho  $0 < p, q, \theta \leq \infty, \Omega$  thỏa mãn các điều kiện của Định lý 1 và  $\mu > d/p, \rho < \min(2r, 2r-1+1/p)$ . Giả sử với mỗi  $n \in \mathbb{Z}_+, m$  là số lớn nhất thỏa mãn  $|G(m)| \leq n$ .

Khi đó  $R_m$  xác định phương pháp tuyến tính lấy mẫu tối ưu cho  $\varrho_n := \varrho_n(U_{p,\theta}^\Omega, L_q)$  như sau:  $R_m(f) = L_n(X_n^*, \Phi_n^*, f) = \sum_{(k,s) \in K(m)} f(2^{-k} s) \psi_{k,s}$ ,

Ở đây  $X_n^* := G(m) = \{2^{-k} s : (k, s) \in K(m)\}, \Phi_n^* := \{\psi_{k,s}\}_{(k,s) \in K(m)}$ , và chúng ta có đánh giá tiệm cận sau đây:  $\sup_{f \in U_{p,\theta}^\Omega} \|f - R_m(f)\|_q \asymp \varrho_n \asymp \Omega(n^{-1/d}) n^{(1/p-1/q)_+}$ .

*Chứng minh*

Đánh giá cận trên. Chúng ta dễ thấy rằng

$$2^{dm} \ll |G(m)| = \sum_{k \leq m} (2^k + 1)^d \ll \sum_{k \leq m} 2^{dk} \ll 2^{dm}.$$

Do đó, từ (3.2) thì:  $2^{dm} \asymp n$ .

Trường hợp  $p \geq q$ . Xuất phát từ bất đẳng thức  $\|f\|_q \leq \|f\|_p$  dẫn đến chứng minh cho trường hợp này với  $q = p$ . Do  $B_{p,\theta}^\Omega \subset B_{p,\infty}^\Omega$ , chúng ta chỉ cần chứng minh (3.4) cho  $U_{p,\infty}^\Omega$ . Chúng ta lấy tùy ý  $m \in \mathbb{Z}_+, \sup_{f \in U_{p,\infty}^\Omega} \|f - Q_m(f)\|_q \ll \Omega(2^{-m})$ .

Lấy bất kỳ  $f \in U_{p,\infty}^\Omega$ . Đặt  $\tau = \min(p, 1)$ , sử dụng Định lý 1 chúng ta nhận được

$$\begin{aligned} \|f - Q_m(f)\|_p^\tau &\ll \sum_{k > m} \|q_k(f)\|_p^\tau \\ &\ll \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \left[ \|q_k(f)\|_p / \Omega(2^{-k}) \right]^\tau \sum_{k > m} \Omega(2^{-k})^\tau \\ &\ll \|f\|_{B_{p,\infty}^\Omega}^\tau \sum_{k > m} \Omega(2^{-k})^\tau \ll \sum_{k > m} \Omega(2^{-k})^\tau. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Từ (2.10) chúng ta suy ra rằng  $\Omega(2^{-k}) \ll \Omega(2^{-m})2^{-\mu(k-m)}$  cho bất kỳ  $k > m$ .

Do đó, chúng ta tiếp tục đánh giá (3.7) như sau

$$\|f - Q_m(f)\|_p^\tau \ll \sum_{k>m} \{\Omega(2^{-m})2^{-(k-m)\mu}\}^\tau \ll \Omega(2^{-m})^\tau \sum_{k>m} \{2^{-(k-m)\mu}\}^\tau \ll \Omega(2^{-m})^\tau.$$

Điều này đồng nghĩa với việc chứng minh bất đẳng thức (3.6). Chú ý rằng số giá trị lấy mẫu trong  $Q_m(f)$  là  $|G(m)|$ . Chúng ta xác định  $R_m(f) = Q_m(f)$ . Bởi (3.5), chúng ta nhận được:

$$\sup_{f \in U} \|f - Q_m(f)\|_q \ll \Omega(n^{-1/d}).$$

Trường hợp  $p < q$ . Đầu tiên chúng ta xem xét trường hợp  $p < q < \infty$ . Cho  $f \in B_{p,\theta}^\Omega$ , Bởi [6, Bổ đề 5.3] chúng ta có:  $\|f - R_m(f)\|_p^q \ll \sum_{k>m} \{2^{(d/p-d/q)k} \|q_k(f)\|_p\}^q$ .

Nếu  $\theta \leq q$ , thì

$$\begin{aligned} \|f - R_m(f)\|_q &\ll \left( \sum_{k>m} \{2^{(d/p-d/q)k} \|q_k(f)\|_p\}^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\ll \sup_{k>m} 2^{(d/p-d/q)k} \Omega(2^{-k}) \left( \sum_{k>m} \{\|q_k(f)\|_p / \Omega(2^{-k})\}^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\ll \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \sup_{k>m} 2^{(d/p-d/q)k} \Omega(2^{-k}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Từ (2.10) chúng ta nhận được:  $\Omega(2^{-k})2^{\mu k} \ll \Omega(2^{-m})2^{\mu m}$ ,  $k > m$ .

$$\text{Do đó: } \Omega(2^{-k})2^{(d/p-d/q)k} \ll \Omega(2^{-m})2^{(d/p-d/q)m}2^{(\mu-(d/p-d/q)(m-k))}, k > m, \quad (3.9)$$

Suy ra  $\Omega(2^{-k})2^{(d/p-d/q)k} \ll \Omega(2^{-m})2^{(d/p-d/q)m}$ ,  $k > m$ . Cho  $f \in U_{p,\theta}^\Omega$ , từ bất đẳng thức cuối cùng và (3.8) chúng ta thấy rằng:  $\|f - R_m(f)\|_q \ll \Omega(2^{-m})2^{(d/p-d/q)m}$ .

Bởi bất đẳng thức cuối cùng và (3.5) chúng ta suy ra được

$$\|f - R_m(f)\|_q \ll \Omega(n^{-1/d})n^{(1/p-1/q)}. \quad (3.10)$$

Đánh giá cận trên của  $\rho_n$  cho trường hợp  $\theta \leq q$  được chứng minh.

Nếu  $\theta > q$  thì

$$\begin{aligned} \|f - R_m(f)\|_q^q &\ll \sum_{k>m} \{2^{(d/p-d/q)k} \|q_k(f)\|_p\}^q \\ &= \sum_{k>m} \{\Omega(2^{-k})2^{(d/p-d/q)k}\}^q \{\|q_k(f)\|_p / \Omega(2^{-k})\}^q. \end{aligned}$$

Hơn nữa, có một số  $q^*$  thỏa mãn  $1/q = 1/\theta + 1/q^*$ . Áp dụng bất đẳng thức Holder, chúng ta có

$$\begin{aligned} \|f - R_m(f)\|_q &\ll \left( \sum_{k>m} \{\Omega(2^{-k})2^{(d/p-d/q)k}\}^q \left\{ \|q_k(f)\|_p / \Omega(2^{-k}) \right\}^q \right)^{1/q} \\ &\ll \left( \sum_{k>m} \{\Omega(2^{-k})2^{(d/p-d/q)k}\}^{q^*} \right)^{1/q^*} \left( \sum_{k>m} \left\{ \|q_k(f)\|_p / \Omega(2^{-k}) \right\}^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\ll \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \left( \sum_{k>m} \{\Omega(2^{-k})2^{(d/p-d/q)k}\}^{q^*} \right)^{1/q^*}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sử dụng (3.9) chúng ta tiếp tục ước lượng (3.11) như sau

$$\|f - R_m(f)\|_q \ll \Omega(2^{-m})2^{(d/p-d/q)m} \left( \sum_{k>m} \{2^{(\mu-(d/p-d/q)(m-k))}\}^{q^*} \right)^{1/q^*} \ll \Omega(2^{-m})2^{(d/p-d/q)m}. \quad (3.12)$$

Từ (3.12), (3.5) chúng ta nhận được (3.10). Đánh giá cận trên của  $\rho_n$  được chứng minh cho  $p < q < \infty$ .

Trong trường hợp  $p < q = \infty$ , chứng minh tương tự như trường hợp  $p < q < \infty$  bằng cách sử dụng bất đẳng thức sau

$$\|f - R_m(f)\|_\infty \ll \sum_{k>m} 2^{dk/p} \|q_k(f)\|_p.$$

Đánh giá cận dưới. Nếu  $W \subset L_q(I^d)$ , thì từ định nghĩa của  $\rho_n(W, L_q(I^d))$  chúng ta có:  $\rho_n(W, L_q(I^d)) \gg \inf_{X_n = \{x^j\}_{j=1}^n \subset I^d} \sup_{f \in W: f(x^j)=0, j=1, \dots, n} \|f\|_q$ . (3.13)

Cô định một số  $r = 2^m$  với số nguyên không âm  $m$  sao cho  $\rho < \min(r, r-1+1/p)$ .

Cho một số nguyên  $\eta > m$ . Xem xét hình hộp  $J(s) \subset I^d$

$$J(s) := \{x \in I^d : 2^{-\eta+m} s_j \leq x_j < 2^{-\eta+m} (s_j + 1), j = 1, \dots, d\}, s \in Z(\eta),$$

Ở đây:  $Z(\eta) := \{s \in \mathbb{R}_+^d : 0 \leq s_j \leq 2^{\eta-m} - 1, j = 1, \dots, d\}$ .

Với mỗi  $n$  cho trước, chúng ta tìm được  $\eta$  thỏa mãn

$$n \asymp 2^{d(\eta-m)} = |Z(\eta)| \geq 2n. \quad (3.14)$$

Đặt  $X_n = \{x^j\}_{j=1}^n$  là một tập con tùy ý gồm  $n$  điểm trong  $I^d$ . Do  $J(s) \cap J(s') = \emptyset$  với  $s \neq s'$ , và  $|Z(\eta)| \geq 2n$ , có  $Z^*(\eta) \subset Z(\eta)$  thỏa mãn  $|Z^*(\eta)| \geq n$  và  $X_n \cap \left\{ \bigcup_{s \in Z^*(\eta)} J(s) \right\} = \emptyset$ . (3.15)

Trường hợp  $p \leq q$ . Xem xét hàm số  $g^* \in \Sigma(\eta)$  xác định bởi

$$g^* := \lambda \Omega(2^{-\eta}) 2^{d\eta/p} M_{\eta, rs+r/2}, s \in Z^*(\eta),$$

Ở đây  $M_{\eta, rs+r/2}$  là B-splines có bậc  $r$ . Bởi (2.9) chúng ta có

$$\|g^*\|_q \asymp \lambda \Omega(2^{-\eta}) 2^{(d/p-d/q)\eta} \quad (3.16) \quad \text{và} \quad \|g^*\|_p \asymp \lambda \Omega(2^{-\eta}).$$

Do đó, từ Hệ quả 1 tồn tại  $\lambda > 0$  độc lập với  $\eta$  và  $n$  sao cho  $g^* \in U_{p,\theta}^\Omega$ . Chú ý rằng  $M_{\eta,rs+r/2}(x), x \notin J(s)$ , cho bất kỳ,  $s \in Z^*(\eta)$  và do đó, từ (3.15)  $g^*(x^j) = 0, j = 1, \dots, n$ . Từ (3.13), (3.16) và (3.14) chúng ta nhận được

$$\varrho_n \gg \|g^*\|_q \asymp \Omega(n^{-1/d}) n^{(1/p-1/q)}.$$

Chúng ta chứng minh xong đánh giá cận dưới của  $\varrho_n$  cho trường hợp  $p \leq q$ .

Trường hợp  $p > q$ . xét hàm số  $g^* \in \Sigma(\eta)$  xác định bởi

$$g^* := \lambda \Omega(2^{-\eta}) \sum_{s \in Z^*(\eta)} M_{\eta,rs+r/2}.$$

Từ (2.9) thấy rằng:  $\|g^*\|_q \asymp \lambda \Omega(2^{-\eta})$ , và  $\|g^*\|_p \asymp \lambda \Omega(2^{-\eta})$ .

Do đó từ Hệ quả 1 có  $\lambda > 0$  độc lập với  $\eta$  và  $n$  sao cho  $g^* \in U_{p,\theta}^\Omega$ . Chú ý rằng  $g^*(x^j) = 0, j = 1, \dots, n$ . Từ (3.13), (3.14), (3.17) chúng ta suy ra

$$\varrho_n \gg \|g^*\|_q \asymp \Omega(n^{-1/d}).$$

Đánh giá cận dưới của  $\varrho_n$  cho trường hợp  $p > q$  được chứng minh.

#### 4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu vấn đề khôi phục và xấp xỉ hàm số bằng phương pháp không thích nghi cho lớp hàm số không tuần hoàn thuộc không gian Besov có độ trơn đẳng hướng. chúng tôi đạt được kết quả mới đó là xây dựng phương pháp tuyến tính và đánh giá tốc độ hội tụ của phương pháp qua đại lượng đặc trưng.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Ronald A. DeVore (1988), Vasil A. Popov, *Interpolation of Besov spaces*, *Transactions of the American Mathematical Society*, 305, 397-413.
- [2] E. Novak, H. Triebel (2006), Function spaces in Lipschitz domains and optimal rates of convergence for sampling, *Constr. Approx*, 23, 325-350
- [3] Dinh Dung, Mai Xuan Thao (2002), Approximate recovery of periodic functions using wavelet decompositions, *Acta Math. Vietnamica*, 27, pp. 185-195.
- [4] Dinh Dung (2009), Non-linear sampling recovery based on quasi-interpolant wavelet representations, *Adv. Comput. Math*, 30, 375-401.
- [5] Dinh Dung (2011), Optimal adaptive sampling recovery, *Adv. Comput. Math*, 31, 1-41.

- [6] Dinh Dung (2011), B-spline quasi-interpolant representations and sampling recovery of functions with mixed smoothness, *Journal of Complexity*, 27, 541-567.
- [7] Dinh Dung (2016), Sampling and cubature on sparse grids based on a B-spline quasiinterpolation, *Found. Comp. Math*, 16, 1193-1240.
- [8] Nguyen Manh Cuong, Mai Xuan Thao (2017), Adaptive sampling recovery of functions with bounded modulus of smoothness, *Acta Mathematica Vietnamica*, 42, 113-127.

## **RECOVERY OF FUNCTIONS IN BESOV-TYPE SPACES BY LINEAR SAMPLING METHODS**

**Nguyen Manh Cuong, Bui Khac Thien**

### ABSTRACT

*We study the recovery and approximation of the class of non-periodic functions in Besov space with isotropic smoothness by non-adaptive linear method. Constructing a linear method based on the sampling value, specifically in this paper is the operator, evaluating the approximate error of the method by the characteristic quantity*

**Keywords:** *Quasi-interpolation representation, Besov-type spaces, linear sampling method.*

\* Ngày nộp bài: 31/7/2020; Ngày gửi phản biện: 3/8/2020; Ngày duyệt đăng: 28/10/2020

\* Bài báo này là kết quả nghiên cứu từ đề tài cấp cơ sở mã số ĐT-2018-21 của Trường Đại học Hồng Đức.

# CẤU TRÚC VÀ TÍNH CHẤT TỪ CỦA HỆ GỒM $Pr_{0,7}A_{0,3}MnO_3$ (A = Ca, Sr, Ba) CHẾ TẠO BẰNG PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN PHẢN ỨNG KẾT HỢP XỬ LÝ NHIỆT

Nguyễn Thị Dung<sup>1,2,3</sup>, Nguyễn Thị Việt Chinh<sup>4</sup>, Nguyễn Văn Đăng<sup>1</sup>, Trần Đăng Thành<sup>2,3,\*</sup>

## TÓM TẮT

Hệ gốm đa tinh thể  $Pr_{0,7}A_{0,3}MnO_3$  (A = Ca, Sr, Ba) có cấu trúc orthorhombic được chế tạo thành công bằng phương pháp nghiền phản ứng kết hợp với xử lý nhiệt. Thông qua giản đồ nhiễu xạ tia X và dữ liệu  $M(H,T)$ , sự ảnh hưởng của việc thay thế cation tại vị trí A lên cấu trúc và tính chất từ của hệ  $Pr_{0,7}A_{0,3}MnO_3$  (A = Ca, Sr, Ba) đã được thảo luận một cách chi tiết. Kết quả cho thấy có sự thay đổi của các tham số mạng và sự dịch chuyển đáng kể của nhiệt độ chuyển pha sắt từ - thuận từ ( $T_C$ ) khi thay thế một phần ion  $Pr^{3+}$  bằng các nguyên tố kiềm thổ có bán kính ion lớn hơn. Trong biến thiên từ trường 10 kOe, mẫu A = Sr ( $Pr_{0,7}Sr_{0,3}MnO_3$ ) nổi bật với hiệu ứng từ nhiệt lớn tại gần nhiệt độ phòng với các giá trị đặc trưng  $\Delta S_{max}$  và  $\Delta C_{pmax}$  cỡ 3,06 và 95,82 J/kgK.

**Từ khóa:** Hiệu ứng từ nhiệt, chuyển pha sắt từ - thuận từ, manganites,  $Pr_{0,7}A_{0,3}MnO_3$ .

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong những năm gần đây, các ôxit mangan có cấu trúc perovskite ( $ABO_3$ ) với công thức chung  $RE_{1-x}A_xMnO_3$ , trong đó RE là nguyên tố đất hiếm hóa trị ba (La, Pr...) và A là nguyên tố hóa trị hai ( $Ca^{2+}$ ,  $Sr^{2+}$ , và  $Ba^{2+}$ ) là hệ vật liệu rất được quan tâm nghiên cứu về cấu trúc tinh thể và các tính chất vật lý [1,2,3,4]. Tương tác trao đổi kép (DE) giữa các ion  $Mn^{3+}$  và  $Mn^{4+}$  thông qua trung gian là ion ôxy cùng với tương tác electron-phonon mạnh xuất phát từ biến dạng Jahn-Teller của bát diện  $MnO_6$  đã làm phát sinh nhiều đặc tính thú vị trong các vật liệu này [5,6]. Một số hiện tượng vật lý hấp dẫn như từ trở khổng lồ (CMR), chuyển pha kim loại-điện môi và hiệu ứng từ nhiệt (MCE) đã được quan sát thấy trong hệ vật liệu  $RE_{1-x}A_xMnO_3$  bằng cách điều chỉnh tương tác giữa electron-electron và mạng tinh thể-electron với các kiểu rối loạn khác nhau [7,8]. Với nhiều tính chất vật lý hấp dẫn và khả năng điều chỉnh dễ dàng nên hệ vật liệu này trở thành đối tượng tiềm năng ứng dụng trong các thiết bị như thiết bị ghi từ, thiết bị truyền động từ, cảm biến, và thiết bị làm lạnh từ... [9,10]. Để có thể đưa vật liệu ứng dụng vào các thiết bị thì cần phải hiểu sâu về các đặc tính vật lý của vật liệu khi

<sup>1</sup> Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên

<sup>2</sup> Viện Khoa học vật liệu, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

<sup>3</sup> Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

<sup>4</sup> Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

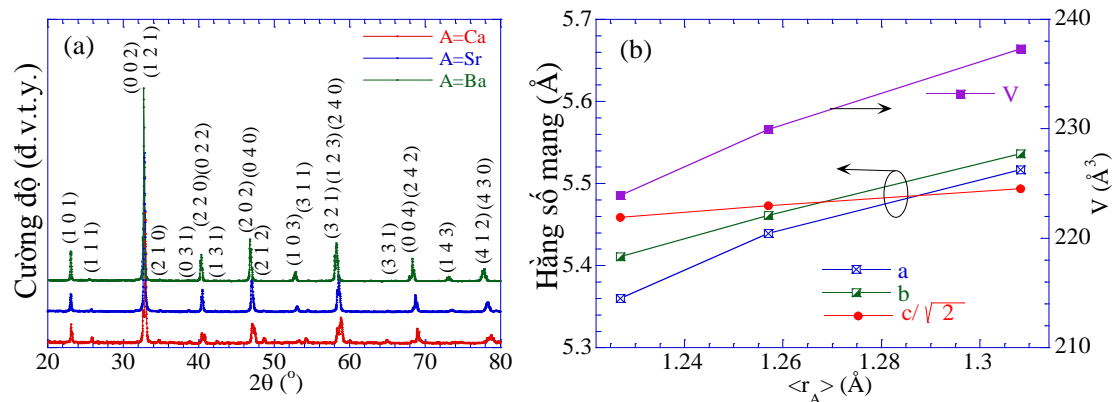
\* Email: thanhtd@ims.vast.ac.vn; thanhxraylab@yahoo.com

chịu ảnh hưởng của các rối loạn khác nhau nhằm tạo ra khả năng kiểm soát và thao tác tốt đối với các thiết bị. Các tính chất khác thường của các vật liệu này có thể đạt được bằng cách đưa các cation có kích thước khác nhau vào mạng cấu trúc mà không làm thay đổi trạng thái hóa trị của ion Mn [11]. Điều này gợi ý rằng biến dạng ngẫu nhiên của các cation  $RE^{3+}$  và  $A^{2+}$  phân bố tại vị trí A trong cấu trúc perovskite  $AMnO_3$  là một tham số quan trọng để điều khiển nhiệt độ chuyển pha và hiệu ứng từ trở của vật liệu [12]. Biến dạng mạng làm thay đổi độ dài liên kết Mn-O và góc liên kết Mn-O-Mn, do đó ảnh hưởng đến sự truyền điện tử giữa các ion mangan. Gần đây, nhiều công trình đã nghiên cứu ảnh hưởng của việc thay thế vị trí A bằng các ion có bán kính khác nhau đã cho thấy có sự cải thiện đáng kể về tính chất từ của vật liệu manganite [11-14]. Tuy nhiên, các nghiên cứu này chủ yếu tập trung vào các hệ manganite nền lanthanum ( $RE = La$ ). Rất gần đây, Pal và cộng sự [15] đã nghiên cứu trường hợp  $RE = Pr, Nd, Sm, Gd$  và  $A = Sr$  đã chỉ ra rằng,  $Pr_{0,7}Sr_{0,3}MnO_3$  là một manganite có mômen từ khá lớn, chuyển pha điện và từ mạnh và giá trị từ trở cao ở từ trường thấp. Kết quả của Aguilar [1] và Pal [15] đã gợi ý rằng, sự không vừa khớp bán kính ion tại vị trí Pr/A trong hệ  $Pr_{0,7}A_{0,3}MnO_3$  sẽ gây ảnh hưởng mạnh đến cấu trúc và tính chất từ của vật liệu. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu chi tiết cấu trúc và tính chất từ của hệ gốm đa tinh thể  $Pr_{0,7}A_{0,3}MnO_3$  (với  $A = Ca, Sr$  và  $Ba$ ). Việc thay thế một phần  $Pr^{3+}$  bằng các ion  $Ca^{2+}$ ,  $Sr^{2+}$  và  $Ba^{2+}$  có bán kính ion khác nhau cho phép chúng tôi đánh giá được sự ảnh hưởng của bán kính ion trung bình ( $\langle r_A \rangle$ ) và độ sai khác bán kính ion tại vị trí Pr/A ( $\sigma^2$ ) lên cấu trúc và tính chất từ của hệ vật liệu.

## 2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

### 2.1. Thực nghiệm

Hệ gốm đa tinh thể  $Pr_{0,7}A_{0,3}MnO_3$  (với  $A = Ca, Sr$  và  $Ba$ ) được chế tạo bằng phương pháp nghiền phản ứng kết hợp xử lý nhiệt. Hóa chất ban đầu đã sử dụng là các bột  $Pr_6O_{11}$ ,  $CaO$ ,  $SrO$ ,  $BaO$  và  $Mn$  có độ sạch 99,9%. Chúng được tính toán và cân theo công thức danh định  $Pr_{0,7}A_{0,3}MnO_3$  (với  $A = Ca, Sr, Ba$ ). Các hóa chất sau cân được nạp vào bình nghiền của máy nghiền cơ năng lượng cao Spex 8000D. Bình và bi nghiền được chế tạo từ thép tôi có độ cứng cao. Tỷ lệ khối lượng bi nghiền/bột là 4,8. Thời gian nghiền là 4 giờ và trong môi trường không khí. Hỗn hợp sau khi nghiền được ép thành viên với áp lực  $5000 \text{ kg/cm}^2$ . Các viên sau đó được nung thiêu kết 12 giờ tại  $1200^\circ\text{C}$  trong không khí. Cấu trúc tinh thể của vật liệu được nghiên cứu thông qua giản đồ nhiễu xạ tia X (XRD) đo trên thiết bị Equinox 5000 (Thermo Scientific) với nguồn bức xạ Cu- $K_\alpha$ , bước sóng  $\lambda = 1,54056 \text{ \AA}$ . Từ độ phụ thuộc nhiệt độ và từ trường được đo trên thiết bị từ kế mẫu rung (VSM-Lakeshore 331) theo chiều tăng nhiệt độ, bước tăng nhiệt  $2 \text{ K}$  và trong từ trường  $H = 0-10 \text{ kOe}$ .



**Hình 1. (a) Giảm đồ XRD tại nhiệt độ phòng và (b) sự thay đổi của các thông số mạng ( $a, b, c/\sqrt{2}$ , và  $V$ ) theo bán kính ion trung bình tại vị trí Pr/A ( $\langle r_A \rangle$ ) của hệ  $\text{Pr}_{0.7}\text{A}_{0.3}\text{MnO}_3$  (A = Ca, Sr và Ba)**

## 2.2. Kết quả và thảo luận

Hình 1(a) trình bày giảm đồ XRD đo tại nhiệt độ phòng của ba mẫu  $\text{Pr}_{0.7}\text{A}_{0.3}\text{MnO}_3$  (với A = Ca, Sr, và Ba). Kết quả phân tích định tính pha cho thấy cả ba mẫu đều đơn pha tinh thể, cấu trúc thuộc hệ orthorhombic với nhóm đối xứng không gian  $Pbnm$ . Có thể quan sát thấy các vạch XRD dịch dần về phía góc nhiễu xạ thấp tương ứng khi A là Ca, Sr và Ba. Từ số liệu XRD, chúng tôi đã tính được các thông số cấu trúc và liệt kê chúng trong Bảng 1. Giá trị bán kính ion của  $\text{Ca}^{2+}$ ;  $\text{Sr}^{2+}$ ;  $\text{Ba}^{2+}$ ;  $\text{Pr}^{3+}$ ;  $\text{Mn}^{3+}$ ;  $\text{Mn}^{4+}$ ;  $\text{O}^{2-}$  đã sử dụng lần lượt là 1,34; 1,44; 1,61; 1,179; 0,72; 0,67; 1,26 Å. Khi đó, việc thay thế lần lượt Ca, Sr, và Ba vào vị trí Pr dẫn đến tăng bán kính trung bình tại vị trí Pr/A ( $\langle r_A \rangle = 0,7 \times r_{\text{Pr}} + 0,3 \times r_{\text{Ca/Sr/Ba}}$ ). Kết quả tính toán cho thấy các tham số mạng tăng dần theo bán kính ion trung bình tại vị trí Pr/A ( $\langle r_A \rangle$ ) như đã chỉ ra trên Hình 1(b). Việc thay thế các ion  $\text{Ca}^{2+}$ ,  $\text{Sr}^{2+}$ ,  $\text{Ba}^{2+}$  vào vị trí  $\text{Pr}^{3+}$  đồng thời cũng làm tăng độ sai khác bán kính ion tại vị trí Pr/A ( $\sigma^2 = \sum y_i r_i^2 - \langle r_A \rangle^2$ ) và tăng thừa số dung hạn ( $\tau_G = ((\langle r_A \rangle + r_O)/\sqrt{2})(r_B + r_O)$ ). Trong đó,  $\tau_G$  của mẫu A = Ba có giá trị cao nhất (0,924), tiệm cận đến 1. Điều này gợi ý rằng cấu trúc tinh thể của  $\text{Pr}_{0.7}\text{Ba}_{0.3}\text{MnO}_3$  gần với cấu trúc perovskite lý tưởng ( $\tau_G = 1$ ) hơn so với  $\text{Pr}_{0.7}\text{Sr}_{0.3}\text{MnO}_3$  và  $\text{Pr}_{0.7}\text{Ca}_{0.3}\text{MnO}_3$ . Theo Ellouze và Boujelben [16], ảnh hưởng của “ứng suất nội” hoặc “ứng suất hóa học” gây bởi việc thay thế tăng dần của bán kính ion tại vị trí A dẫn đến sự gia tăng biến dạng cấu trúc perovskite theo sự tăng của các góc liên kết Mn-O-Mn và độ dài liên kết Mn-O. Trong hệ cấu trúc orthorhombic, ứng suất tự phát có thể được xác định là [16]:

$$s = 2(a - c)/(a + c) \quad (1)$$

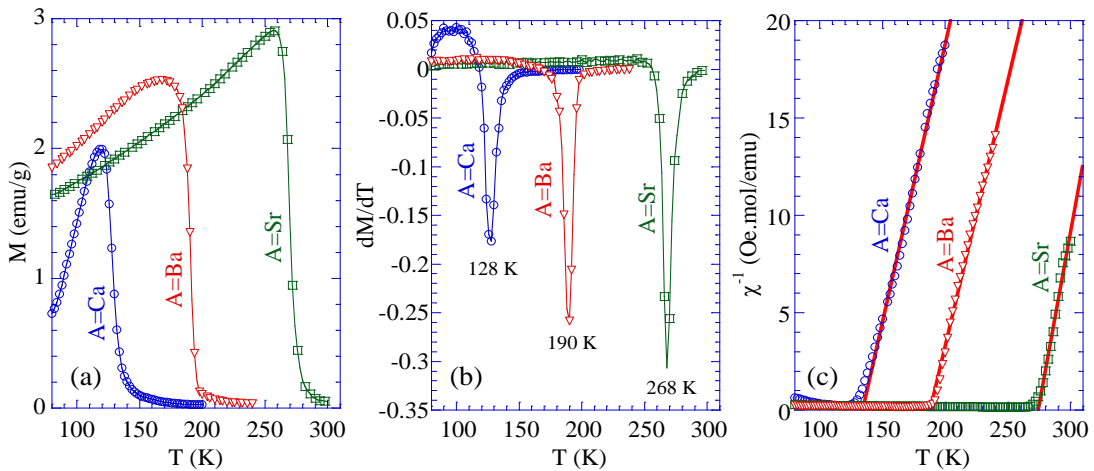
Trên cơ sở đó, chúng tôi đã tính được ứng suất tự phát của  $\text{Pr}_{0.7}\text{A}_{0.3}\text{MnO}_3$  trong cấu trúc orthorhombic với A = Ca; Sr và Ba tương ứng lần lượt là  $s = -36,09 \times 10^{-2}$ ;  $-34,92 \times 10^{-2}$  và  $-33,90 \times 10^{-2}$ . Kết quả này cho thấy ứng suất tự phát của mẫu A = Ba là cao nhất, và thấp nhất với mẫu A = Ca, phù hợp với giá trị thừa số dung hạn đã



tính được ở trên. Như vậy, việc kết hợp giữa quá trình nghiền phản ứng với xử lý nhiệt ở 1200°C khi chế tạo  $\text{Pr}_{0,7}\text{A}_{0,3}\text{MnO}_3$  đã không làm thay đổi kiểu cấu trúc tinh thể orthorhombic của vật liệu nhưng làm thay đổi đáng kể ứng suất cấu trúc tự phát, dẫn đến các góc Mn-O-Mn và độ dài liên kết Mn-O trong cấu trúc thay đổi một cách đồng thời [16,17,18].

**Bảng 1.** Các thông số cấu trúc của hệ vật liệu  $\text{Pr}_{0,7}\text{A}_{0,3}\text{MnO}_3$  (A = Ca, Sr, Ba)

A	$\langle r_A \rangle$ (Å)	$\sigma^2$ (Å <sup>2</sup> )	$\tau_G$	a (Å)	b (Å)	c (Å)	V (Å <sup>3</sup> )	s ( $\times 10^{-2}$ )
Ca	1,227	0,544	0,895	5,360	5,411	7,720	223,89	-36,09
Sr	1,257	1,431	0,906	5,439	5,461	7,740	229,92	-34,92
Ba	1,308	3,901	0,924	5,517	5,536	7,769	237,28	-33,90



**Hình 2.** (a) Đường cong  $M(T)$  đo tại 100 Oe trong chế độ làm lạnh không có từ trường, (b) đạo hàm bậc nhất  $dM/dT$  theo nhiệt độ và (c) nghịch đảo độ cảm từ phụ thuộc nhiệt độ  $\chi^{-1}(T) = H/M(T)$  của vật liệu  $\text{Pr}_{0,7}\text{A}_{0,3}\text{MnO}_3$  (A = Ca, Sr và Ba)

Hình 2(a) biểu diễn đường cong từ độ phụ thuộc nhiệt độ  $M(T)$  đo tại  $H = 100$  Oe trong chế độ làm lạnh không có từ trường. Kết quả cho thấy cả ba mẫu đều trải qua chuyển pha sắt từ - thuận từ (FM-PM). Khi thay đổi các nguyên tố pha tạp lần lượt A = Ca, Ba, Sr có thể điều khiển vùng chuyển pha dịch chuyển về vùng nhiệt độ cao hơn và gần hơn với nhiệt độ phòng. Trong vùng nhiệt độ dưới nhiệt độ chuyển pha, vật liệu ở trạng thái FM, từ độ của các mẫu đều giảm bất thường khi nhiệt độ giảm. Hiện tượng này được cho là có liên quan đến sự cạnh tranh giữa các quá trình từ hóa, quá trình định hướng mômen từ và năng lượng nhiệt [19].

Nhiệt độ Curie ( $T_C$ ) được ước tính từ vị trí điểm uốn của đường cong từ độ phụ thuộc nhiệt độ (cực tiểu của  $dM/dT$ ) như chỉ ra trên Hình 2(b). Giá trị  $T_C$  của  $\text{Pr}_{0,7}\text{A}_{0,3}\text{MnO}_3$  với A = Ca, Ba, và Sr tương ứng là 128, 190, và 268 K. Theo các công bố trước đây, nhiệt độ  $T_C$  và độ rộng dải dẫn  $W$  của vật liệu có mối quan hệ tuyến tính theo biểu thức [15,20,21]:

$$T_C \propto W = w \frac{\cos\beta}{d^{3,5}} \quad (2)$$

Trong đó:  $w$  là hằng số tỉ lệ,  $d$  là độ dài liên kết Mn–O trung bình,  $\beta = (\pi - \varphi)/2$  là góc quay,  $\varphi$  là góc liên kết Mn–O–Mn trung bình.

Thay thế một phần các vị trí trong cấu trúc bằng các nguyên tố có bán kính ion khác nhau là một trong số các cách thường được sử dụng nhằm điều chỉnh cấu trúc, nhiệt độ chuyển pha và tính chất của vật liệu. Trong các manganite, Biểu thức (2) thường được dùng để giải thích sự thay đổi của nhiệt độ  $T_C$ . Theo đó, khi một phần  $\text{Pr}^{3+}$  được thay thế lần lượt bởi  $\text{Sr}^{2+}$  hoặc  $\text{Ca}^{2+}$ , do góc liên kết Mn–O–Mn trung bình của  $\text{Pr}_{0,7}\text{Sr}_{0,3}\text{MnO}_3$  ( $\sim 160^\circ$  [22]) lớn hơn so với  $\text{Pr}_{0,7}\text{Ca}_{0,3}\text{MnO}_3$  ( $\sim 156^\circ$  [2,23]), hệ quả là làm tăng  $W$ , dẫn đến  $T_C$  của mẫu A = Sr lớn hơn so với trường hợp A = Ca. Trong khi đó, khi thay thế một phần  $\text{Pr}^{3+}$  lần lượt bởi  $\text{Sr}^{2+}$  hoặc  $\text{Ba}^{2+}$ , do ion  $\text{Ba}^{2+}$  có bán kính lớn hơn  $\text{Sr}^{2+}$  nên các giá trị  $\langle r_A \rangle$  và  $\sigma^2$  trong trường hợp A = Ba sẽ lớn hơn trường hợp A = Sr. Dẫn đến độ dài liên kết Mn–O trung bình khi A = Ba sẽ lớn hơn khi A = Sr. Hệ quả là làm giảm sự xen phủ của các hàm sóng Mn-3d và O-2p dẫn đến làm suy yếu tương tác trao đổi của các ion  $\text{Mn}^{3+}$ - $\text{Mn}^{4+}$  trong mẫu A = Ba. Khi đó  $T_C$  của vật liệu có A = Ba sẽ thấp hơn so với trường hợp A = Sr [11,15].

Nghịch đảo độ cảm từ  $\chi^{-1}(T)$  xác định được từ số liệu  $H/M(T)$  của các mẫu được trình bày trong Hình 2(c). Trong vùng thuận từ, các số liệu  $\chi^{-1}(T)$  đã được làm khớp theo hàm Curie-Weiss:  $\chi = C/(T - \theta)$ , với  $C$  và  $\theta$  lần lượt là hằng số Curie và nhiệt độ Curie-Weiss. Từ kết quả làm khớp chúng tôi đã xác định được mômen thuận từ hiệu dụng ( $\mu_{\text{eff}}$ ) của các mẫu thông qua biểu thức [24]:

$$C = \frac{N_A (\mu_{\text{eff}})^2 \mu_B^2}{3k_B} \quad (3)$$

trong đó  $N_A = 6,023 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  là số Avogadro,  $\mu_B = 9,274 \times 10^{-21} \text{ emu}$  là magneton Bohr, và  $k_B = 1,38016 \times 10^{-23} \text{ J/K}$  là hằng số Boltzmann.

Về mặt lý thuyết, ta giả thiết mômen từ trong hợp chất  $\text{Pr}_{0,7}\text{A}_{0,3}\text{MnO}_3$  là do các ion  $\text{Mn}^{3+}$  ( $S = 2$ ) và  $\text{Mn}^{4+}$  ( $S = 3$ ) gây ra, với hệ số Lande  $g = 2$ . Khi đó, giá trị mômen thuận từ lý thuyết ( $\mu_{\text{spin}}$ ) có thể được tính dựa trên biểu thức:

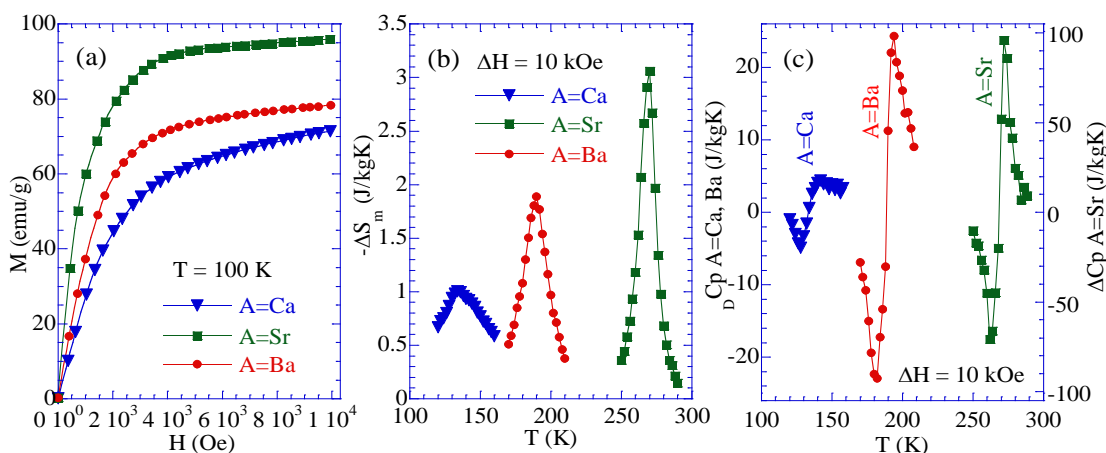
$$(\mu_{\text{spin}})^2 = 0,7 \times (\mu_{\text{Mn}^{3+}})^2 + 0,3 \times (\mu_{\text{Mn}^{4+}})^2 \quad (4)$$

Với  $\mu_{\text{Mn}^{3+}}$  và  $\mu_{\text{Mn}^{4+}}$  lần lượt là mômen spin của các ion  $\text{Mn}^{3+}$  và  $\text{Mn}^{4+}$  với giá trị tương ứng là 4,9 và 3,87  $\mu_B$ . Kết quả xác định giá trị mômen thuận từ hiệu dụng  $\mu_{\text{eff}}$  và mômen thuận từ lý thuyết  $\mu_{\text{spin}}$  của hệ  $\text{Pr}_{0,7}\text{A}_{0,3}\text{MnO}_3$  trong các trường hợp A = Ca, Sr và Ba được trình bày trong Bảng 2. Ta nhận thấy  $\mu_{\text{eff}}$  luôn có giá trị cao hơn so với  $\mu_{\text{spin}}$ . Kết quả này được cho là có sự đóng góp của các tương tác FM trong vùng nhiệt độ trên  $T_C$ , có nghĩa là có sự tồn tại của các đám sắt từ ở trong vùng thuận từ [15]. Đây cũng là lý do mà ta thu được các giá trị  $\theta$  cao hơn so với nhiệt độ chuyển pha FM-PM của vật liệu.

**Bảng 2. Các thông số đặc trưng từ và hiệu ứng từ nhiệt trong biến thiên từ trường 10 kOe của hệ vật liệu  $\text{Pr}_{0,7}\text{A}_{0,3}\text{MnO}_3$  (A = Ca, Sr, Ba)**

A	$T_C$ (K)	$\theta$ (K)	$\mu_{\text{eff}}$ ( $\mu_B$ )	$\mu_{\text{Spin}}$ ( $\mu_B$ )	$M_{10\text{kOe}, 100\text{K}}$ (emu/g)	$ \Delta S_{\text{max}} $ (J/kgK)	$\Delta C_{\text{Pmin}}$ (J/kgK)	$\Delta C_{\text{Pmax}}$ (J/kgK)
Ca	128	133,9	5,30	4,62	71,57	1,01	-4,86	4,39
Sr	268	273,9	4,77	4,62	95,83	3,06	-70,92	95,82
Ba	190	190,7	5,43	4,62	78,33	1,88	-22,90	24,29

Hình 3(a) trình bày các đường cong từ hóa ban đầu  $M(H)$  được đo tại nhiệt độ  $T = 100$  K trong từ trường cực đại 10 kOe của hệ vật liệu  $\text{Pr}_{0,7}\text{A}_{0,3}\text{MnO}_3$  (A = Ca, Sr, Ba). Trong vùng từ trường thấp, từ độ của các mẫu đều tăng rất nhanh, sau đó tiệm cận bão hòa trong vùng từ trường cao hơn (trên 4 kOe). Đặc trưng này thường được quan sát thấy trong trạng thái sắt từ của các manganite. Tại 100 K, trong từ trường 10 kOe, từ độ của các mẫu A = Sr, Ba và Ca có giá trị 95,83; 78,33 và 71,57 emu/g tương ứng với  $T_C = 268$ ; 190 và 128 K. Kết quả này gợi ý rằng tương tác sắt từ trong mẫu A = Sr có cường độ mạnh nhất.



**Hình 3. (a) Đường cong từ hóa ban đầu đo tại 100 K, (b) biến thiên entropy từ và (c) biến thiên nhiệt dung riêng xác định được trong biến thiên từ trường 10 kOe của hệ vật liệu  $\text{Pr}_{0,7}\text{A}_{0,3}\text{MnO}_3$  (A = Ca, Sr và Ba)**

Trên cơ sở các số liệu thực nghiệm  $M(H, T)$  đo tại các nhiệt độ khác nhau quanh nhiệt độ  $T_C$  của các mẫu, chúng tôi đã tính được giá trị biến thiên entropy ( $\Delta S_m$ ) và biến thiên nhiệt dung riêng ( $\Delta C_p$ ) của vật liệu  $\text{Pr}_{0,7}\text{A}_{0,3}\text{MnO}_3$  (A = Ca, Sr, Ba) trong biến thiên từ trường 10 kOe thông qua các biểu thức sau [25,26]:

$$\Delta S_m(T, H) = \int_0^H \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_H dH \quad (5)$$

$$\Delta C_p(T, H) = T \frac{\partial \Delta S_m(T, H)}{\partial T} \quad (6)$$

Hình 3(b) và 3(c) trình bày sự phụ thuộc nhiệt độ của  $\Delta S_m$  và  $\Delta C_p$  đã tính được theo các Biểu thức (5) và (6) cho hệ vật liệu  $\text{Pr}_{0,7}\text{A}_{0,3}\text{MnO}_3$  ( $\text{A} = \text{Ca}, \text{Sr}, \text{Ba}$ ). Đường cong  $\Delta S_m(T)$  của các mẫu đều thể hiện một đỉnh cực đại ứng với chuyển pha FM-PM của vật liệu. Khi thay đổi nguyên tố pha tạp theo thứ tự  $\text{A} = \text{Ca}, \text{Ba}, \text{Sr}$  thì giá trị biến thiên entropy từ cực đại tăng dần từ 1,01 tới 3,06 J/kgK (Bảng 2). Đường cong  $\Delta C_p(T)$  của các mẫu thể hiện một sự thay đổi đột ngột từ tín hiệu âm (khi  $T < T_C$ ) sang tín hiệu dương (khi  $T > T_C$ ) ở lân cận vùng chuyển pha FM-PM. Trong đó, tiêu biểu nhất là mẫu  $\text{A} = \text{Sr}$ , trong biến thiên từ trường 10 kOe,  $\Delta C_p$  đạt giá trị nhỏ nhất và lớn nhất tương ứng là -70,92 và 95,82 J/kgK. Điều này có nghĩa là mẫu  $\text{A} = \text{Sr}$  có hiệu ứng từ nhiệt mạnh nhất trong số các mẫu nghiên cứu.

Để giải thích cho mức độ mạnh hay yếu (liên quan đến giá trị biến thiên entropy từ cao hay thấp), ta trở lại Biểu thức (5). Trong mỗi biến thiên từ trường xác định, giá trị của  $\Delta S_m$  phụ thuộc đồng thời vào hai đại lượng, đó là độ lớn của từ độ  $M$  và độ sắc nét của quá trình thay đổi từ độ  $M$  theo nhiệt độ  $T$  ( $\partial M/\partial T$ ). Có nghĩa là  $\Delta S_m$  của vật liệu từ có giá trị cao khi vật liệu đó có đồng thời hai yếu tố là từ độ cao và chuyển pha từ sắc nét. Trong nghiên cứu này, mẫu  $\text{A} = \text{Sr}$  có giá trị  $M$  cao nhất và chuyển pha FM-PM sắc nét nhất (Hình 2(b)), nên  $\Delta S_m$  của mẫu này đạt giá trị cao nhất ( $|\Delta S_{\max}| = 3,06 \text{ J/kgK}$ ).

### 3. KẾT LUẬN

Bằng phương pháp nghiên cứu phản ứng kết hợp với xử lý nhiệt chúng tôi đã chế tạo thành công hệ gồm đa tinh thể  $\text{Pr}_{0,7}\text{A}_{0,3}\text{MnO}_3$  ( $\text{A} = \text{Ca}, \text{Sr}$  và  $\text{Ba}$ ). Việc thay đổi nguyên tố pha tạp có bán kính ion khác nhau đã gây ra một số biến dạng mạng tinh thể và thay đổi các thông số cấu trúc nhưng không gây ra chuyển pha cấu trúc orthorhombic. Kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng nhiệt độ chuyển pha FM-PM và các đặc trưng từ nhiệt của vật liệu ( $\Delta S_m$  và  $\Delta C_p$ ) hoàn toàn có thể điều khiển được thông qua việc lựa chọn nguyên tố thay thế  $\text{A}$ . Với  $\text{A} = \text{Sr}$ , vật liệu thể hiện các đặc trưng từ tối ưu hơn so với hai trường hợp còn lại. Trong biến thiên từ trường 10 kOe, vật liệu  $\text{Pr}_{0,7}\text{Sr}_{0,3}\text{MnO}_3$  đạt được  $|\Delta S_{\max}| = 3,06 \text{ J/kgK}$  tại gần  $T_C = 268 \text{ K}$  và giá trị biến thiên nhiệt dung lớn với  $\Delta C_{p\min} = -70,92 \text{ J/kgK}$ ,  $\Delta C_{p\max} = 95,82 \text{ J/kgK}$ . Với các ưu điểm như dễ chế tạo và độ bền cao, vật liệu  $\text{Pr}_{0,7}\text{Sr}_{0,3}\text{MnO}_3$  có thể trở thành một đối tượng tiềm năng trong ứng dụng công nghệ làm lạnh từ ở vùng gần nhiệt độ phòng.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] C.J. Aguilar, J.E. Diosa, E. Mosquera, J.E. Rodríguez-Páez (2020), Study of the structural and optical properties of nanoparticles of  $\text{Pr}_{1-x}\text{Sr}_x\text{MnO}_3$  ( $x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  and  $0.5$ ) obtained by a modified polymer complex method, *Materials Science and Engineering: B*, 260, 114617.

- [2] N. Jiang, Y. Jiang, Q. Lu, S. Zhao (2019), Dynamic exchange effect induced multi-state magnetic phase diagram in manganese oxide  $\text{Pr}_{1-x}\text{Ca}_x\text{MnO}_3$ , *Journal of Alloys and Compounds*, 805, 50-56.
- [3] S. Yamada, N. Abe, H. Sagayama, K. Ogawa, T. Yamagami, and T. Arima (2019), Room-temperature low-field colossal magnetoresistance in double-perovskite manganite, *Physical review letters*, 123(12), 126602.
- [4] Y. Li, H. Zhang, X. Liu, Q. Chen, Q. Chen (2019), Electrical and magnetic properties of  $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{MnO}_3$  ( $0.1 \leq x \leq 0.25$ ) ceramics prepared by sol-gel technique, *Ceramics International*, 45(13), 16323-16330.
- [5] A.J. Millis, P.B. Littlewood, and B.I. Shraiman (1995), Double exchange alone does not explain the resistivity of  $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{MnO}_3$ , *Physical review letters*, 74(25), 5144.
- [6] C. Zener (1951), Interaction between the  $d$ -shells in the transition metals. II. Ferromagnetic compounds of manganese with perovskite structure, *Physical Review*, 82(3), 403.
- [7] C.A. Taboada-Moreno, F. Sánchez-De Jesús, F. Pedro-García, C.A. Cortés-Escobedo, J.A. Betancourt-Cantera, M. Ramírez-Cardona, A.M. Bolarín-Miró (2020), Large magnetocaloric effect near to room temperature in Sr doped  $\text{La}_{0.7}\text{Ca}_{0.3}\text{MnO}_3$ , *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 496, 165887.
- [8] S. Solanki, D. Dhruv, H. Boricha, A. Zankat, K.N. Rathod, B. Rajyaguru, R.K. Trivedi, A.D.Joshi, S. Mukherjee, P.S. Solanki, N.A.Shah, Charge transport mechanisms and magnetoresistance behavior of  $\text{La}_{0.6}\text{Pr}_{0.1}\text{Ca}_{0.3}\text{MnO}_3$  manganite, *Journal of Solid State Chemistry*, 288, 121446.
- [9] B. Sievers, M. Quintero, J. Sacanell (2019), Thermal cycling memory in phase separated manganites, *Materials Today: Proceedings*, 14, 84-87.
- [10] Y. Xu, M. Meier, P. Das, M.R. Koblischka, U. Hartmann (2002), Perovskite manganites: potential materials for magnetic cooling at or near room temperature, *Crystal Engineering*, 5(3-4), 383-389.
- [11] Y. Li, H. Zhang, Q. Chen, D. Li, Z. Li, Y. Zhang (2018), Effects of A-site cationic radius and cationic disorder on the electromagnetic properties of  $\text{La}_{0.7}\text{Ca}_{0.3}\text{MnO}_3$  ceramic with added Sr, Pb, and Ba, *Ceramics International*, 44(5), 5378-5384.
- [12] S. Saha, K. Das, S. Bandyopadhyay, I. Das (2017), A-site cationic disorder induced significantly large magnetoresistance in polycrystalline  $\text{La}_{0.2}\text{Gd}_{0.5}\text{Ba}_{0.3}\text{MnO}_3$  compound, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 442, 196-199.
- [13] G. Xiao, W. He, P. Chen, X. Wu (2019), Effect of Nd-substitution on the structural, magnetic and magnetocaloric properties of  $\text{La}_{0.67-x}\text{Nd}_x\text{Ca}_{0.13}\text{Ba}_{0.2}\text{MnO}_3$  manganites, *Physica B: Condensed Matter*, 564, 133-142.

- [14] P.P. Ma, Q.L. Lu, N. Lei, Y.K. Liu, B. Yu, J.M. Dai, S.H. Li, G.H. Jiang (2020), Effect of A-site substitution by Ca or Sr on the structure and electrochemical performance of  $\text{LaMnO}_3$  perovskite, *Electrochimica Acta*, 332, 135489.
- [15] A. Pal, A. Rao, D. Kekuda, B.S. Nagaraja, R. Mondal, D. Biswas (2020), Investigation of cationic disorder effects on the transport and magnetic properties of perovskite  $\text{Pr}_{0.7-x}\text{RE}_x\text{Sr}_{0.3}\text{MnO}_3$  ( $x = 0.0, 0.2$ ; RE = Nd, Sm, & Gd), *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 332, 167011.
- [16] M. Ellouze, W. Boujelben, H. Fuess (2003), Rietveld refinement X-ray powder data of  $\text{Pr}_{0.7}\text{Ba}_{0.3}\text{MnO}_3$ , *Powder Diffraction*, 18(1), 29-31.
- [17] N.T. Dung, D.C. Linh, P.D.H. Yen, S.C. Yu, N.V. Dang and T.D. Thanh (2018), Magnetic and critical properties of  $\text{Pr}_{0.6}\text{Sr}_{0.4}\text{MnO}_3$  nanocrystals prepared by a combination of the solid state reaction and the mechanical ball milling methods, *Advances in Natural Sciences: Nanoscience and Nanotechnology*, 9(2), 025010.
- [18] S. Zouari, M. Ellouze, A. Nasri, W. Cherif, E.K. Hlil, F. Elhalouani (2014), Morphology, structural, magnetic, and magnetocaloric properties of  $\text{Pr}_{0.7}\text{Ca}_{0.3}\text{MnO}_3$  nanopowder prepared by mechanical ball milling method, *Journal of Superconductivity and Novel Magnetism*, 27(2), 555-563.
- [19] A.N. Ulyanov, H.D. Quang, N.E. Pismenova, and S.C. Yu (2005), EPR and resistivity study of  $\text{Pr}_{0.7}\text{Ba}_{0.3}\text{MnO}_3$  manganite, *IEEE Transactions on Magnetics*, 41(10), 2745-2747.
- [20] P. G. Radaelli, G. Iannone, M. Marezio, H.Y. Hwang, S-W. Cheong, J.D. Jorgensen, and D.N. Argyriou (1997), Structural effects on the magnetic and transport properties of perovskite  $\text{A}_{1-x}\text{A}_x\text{MnO}_3$  ( $x = 0.25, 0.30$ ), *Physical Review B*, 56(13), 8265.
- [21] T. Geng and S. Zhuang (2010), Correlations between structural effects and  $e_g$  bandwidth in manganites, *Physics Letters A*, 374(15-16), 1784-1789.
- [22] N.T. Dang, D.P. Kozlenko, S.E. Kichanov, L.S. Dubrovinsky, Z. Jirák, D.M. Levin, E.V. Lukin & B.N. Savenko (2013), Structural and magnetic phase transitions occurring in  $\text{Pr}_{0.7}\text{Sr}_{0.3}\text{MnO}_3$  manganite at high pressures, *JETP letters*, 97(9), 540-545.
- [23] C.S. Nelson, M.V. Zimmermann, Y.J. Kim, J.P. Hill, D. Gibbs, V. Kiryukhin, T.Y. Koo, S.-W. Cheong, D. Casa, B. Keimer, Y. Tomioka, Y. Tokura, T. Gog, and C.T. Venkataraman (2001), Correlated polarons in dissimilar perovskite manganites, *Physical Review B*, 64(17), 174405.
- [24] R. Tripathi, V.P.S. Awana, N. Panwar, G.L. Bhalla, H.U. Habermier, S.K. Agarwal and H. Kishan (2009), Enhanced room temperature coefficient of resistance and magnetoresistance of Ag-added  $\text{La}_{0.7}\text{Ca}_{0.3-x}\text{Ba}_x\text{MnO}_3$  composites, *Journal of Physics D: Applied Physics*, 42(17), 175002.

- [25] A.M. Tishin and Y.I. Spichkin (2016), The magnetocaloric effect and its applications, *CRC Press*.
- [26] M.H. Phan and S.C. Yu (2007), Review of the magnetocaloric effect in manganite materials, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 308(2), 325-340.

## STRUCTURE AND MAGNETIC PROPERTIES OF $\text{Pr}_{0.7}\text{A}_{0.3}\text{MnO}_3$ (A = Ca, Sr, Ba) CERAMICS PREPARED BY COMBINATION OF REACTIVE MILLING AND HEAT TREATMENT METHODS

Nguyen Thi Dung, Nguyen Thi Viet Chinh, Nguyen Van Dang, Tran Dang Thanh

### ABSTRACT

*$\text{Pr}_{0.7}\text{A}_{0.3}\text{MnO}_3$  (with A = Ca, Sr, Ba) ceramics belonging to an orthorhombic structure were successfully prepared by a combination of the reactive milling and the heat treatment methods. Based on experimental data of X-ray diffraction and  $M(H, T)$ , the effect of cation replacement at Pr/A-site on the structure and the magnetic properties of the  $\text{Pr}_{0.7}\text{A}_{0.3}\text{MnO}_3$  (A = Ca, Sr, Ba) system has been carefully investigated. The results show a change in the lattice parameters and a significant shift in the ferromagnetic-paramagnetic phase transition temperature ( $T_C$ ) when a part of the  $\text{Pr}^{3+}$  ion was replaced by a larger ion ( $\text{Ca}^{2+}$ ,  $\text{Sr}^{2+}$ , and  $\text{Ba}^{2+}$ ). Under an applied magnetic field change of 10 kOe,  $\text{Pr}_{0.7}\text{Sr}_{0.3}\text{MnO}_3$  sample stands out clearly in a large magnetocaloric effect near room temperature with the characteristic values such as  $|\Delta S_{\max}|$  and  $\Delta C_{p\max}$  about 3.06 and 95.82 J/kgK, respectively.*

**Keywords:** Magnetocaloric, magnetic phase transition, manganites,  $\text{Pr}_{0.7}\text{Sr}_{0.3}\text{MnO}_3$ .

\* Ngày nộp bài: 14/10/2020; Ngày gửi phản biện: 17/10/2020; Ngày duyệt đăng: 28/10/2020

\* Lời cảm ơn: Công trình này được tài trợ một phần kinh phí bởi đề tài Khoa học và Công nghệ cấp Bộ mã số B2019-TNA-01.VL, Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên; và một phần kinh phí được hỗ trợ từ Quỹ Phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 103.02-2019.42.

# NGHIÊN CỨU ẢNH HƯỞNG CỦA NỒNG ĐỘ PHA TẠP CARBON LÊN CẤU TRÚC CỦA CÁC MÀNG $Mn_5Ge_3$ ĐƯỢC CHẾ TẠO TRÊN ĐỂ Ge(111)

Lê Thị Giang<sup>1</sup>

TÓM TẮT

*Bằng cách kết hợp các phép phân tích cấu trúc hiện đại từ nhiễu xạ điện tử phản xạ năng lượng cao (RHEED), Kính hiển vi điện tử truyền qua độ phân giải cao (HR-TEM) và giản đồ nhiễu xạ tia X (X-ray), nhóm nghiên cứu đã xác định được nồng độ carbon tối đa có thể pha tạp vào màng  $Mn_5Ge_3$  mà không làm thay đổi cấu trúc của chúng là  $x = 0,6$ . Vượt quá nồng độ này, các màng sẽ thay đổi hoàn toàn cấu trúc và chuyển sang dạng đa tinh thể hay vô định hình tương ứng với nồng độ carbon  $x = 0,7$  và  $0,9$ . Nguyên nhân được cho là do carbon ở những nồng độ này đã vượt ngưỡng cho phép nên không thể kết hợp được vào các vị trí xen kẽ còn trống trong màng tinh thể dẫn tới carbon dư thừa phá hủy cấu trúc của màng.*

**Từ khóa:** Màng mỏng,  $Mn_5Ge_3$ , pha tạp carbon.

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Công nghệ điện tử spin, thế hệ kế tiếp của công nghệ bán dẫn, sẽ được thúc đẩy phát triển một cách mạnh mẽ nếu tính chất sắt từ ở nhiệt độ phòng có thể được đưa vào các thiết bị bán dẫn và các mạch tích hợp. Có hai phương pháp đã được sử dụng để tiêm dòng spin phân cực vào các bán dẫn: sử dụng tiếp giáp không đồng nhất kim loại sắt từ /bán dẫn thông qua hàng rào điện môi hoặc hàng rào Schottky [1]; sử dụng bán dẫn pha loãng từ như một bộ điều chỉnh spin [2,3]. Với phương pháp thứ nhất, vấn đề khó khăn gặp phải là không thể lắng đọng trực tiếp kim loại sắt từ lên các bán dẫn nên để tạo ra lớp tiếp giáp kim loại/bán dẫn. Phương pháp thứ hai bị hạn chế bởi nhiệt độ chuyển pha thấp của các bán dẫn pha loãng từ (dưới nhiệt độ phòng) [4].

Gần đây, một phương án thay thế đã được đưa ra, trong đó các hợp chất sắt từ như  $Fe_3Si$  [5,6],  $Fe_{1.7}Ge$  [7] hay  $Mn_5Ge_3$  [8-13] được phát triển epitaxy trên đế Si và Ge và hoạt động như một tiêm spin. Trong số đó, duy nhất có hợp chất  $Mn_5Ge_3$  là thể hiện tính sắt từ ở nhiệt độ phòng. Theo tính toán lý thuyết,  $Mn_5Ge_3$  sẽ cho hiệu suất tiêm spin cao và có độ phân cực spin lên tới 42% [14]. Các màng mỏng  $Mn_5Ge_3$  đã được chỉ ra là có thể phát triển một cách epitaxy trên đế Ge (111), cho phép tiêm trực tiếp dòng spin phân cực vào bán dẫn nhóm IV [9-11,13]. Đặc biệt là một số nghiên cứu đã chỉ ra rằng có thể làm tăng từ tính và độ phân cực spin của  $Mn_5Ge_3$  bằng cách pha tạp một lượng nhỏ C [8,11,12] hoặc Fe [6,15].

<sup>1</sup> Khoa Kỹ thuật và Công nghệ, Trường Đại học Hồng Đức



Nghiên cứu lý thuyết cho thấy, pha tạp một lượng nhỏ C sẽ làm tăng nhiệt độ chuyển pha của vật liệu do các nguyên tử C có bán kính nhỏ nên dễ dàng khuếch tán đến các vị trí trống trong mạng tinh thể. Một số nghiên cứu thực nghiệm ban đầu theo hướng này cũng đã được thực hiện nhưng chưa đưa ra được nồng độ C pha tạp tối ưu [2,16,17]. Để có thể đưa vào trong các ứng dụng, vật liệu không chỉ cần có nhiệt độ chuyển pha cao mà còn phải giữ được cấu trúc ổn định vì quá trình chế tạo các thiết bị sẽ trải qua một số bước ủ nhiệt. Chính vì vậy, trong nghiên cứu này chúng tôi thực hiện việc pha tạp C trong quá trình chế tạo các màng  $Mn_5Ge_3$  và phân tích ảnh hưởng của chúng lên cấu trúc của màng, với hy vọng đưa ra được nồng độ C tối đa có thể pha tạp mà vẫn giữ được cấu trúc của pha  $Mn_5Ge_3$ .

## 2. THỰC NGHIỆM

Trong nghiên cứu này, chúng tôi lựa chọn chế tạo các mẫu  $Mn_5Ge_3C_x$  với hàm lượng C khác nhau ( $x = 0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,7 ; 0,9$ ) bằng phương pháp epitaxy chùm phân tử (MBE) trên đế Ge(111). Sở dĩ chúng tôi lựa chọn các nồng độ này bởi lẽ trong quá trình chế tạo, theo dõi trên màn hình RHEED bắt đầu từ nồng độ  $x = 0,6$  hình ảnh các sọc có dấu hiệu mờ đi nên ở mẫu sau chúng tôi đã lựa chọn chế tạo ở ngay nồng độ  $x = 0,7$  để có thể thấy được sự chuyển biến rõ hơn về sự hình thành cấu trúc của các màng. Các mẫu được khảo sát cấu trúc bằng giản đồ nhiễu xạ tia X và kính hiển vi điện tử truyền qua (TEM). Tính chất từ của các mẫu được khảo sát bởi hệ đo từ SQUID. Kết quả các phép đo sẽ được phân tích và tổng hợp để đưa ra hàm lượng C pha tạp phù hợp nhằm ổn định tốt nhất các bán dẫn sắt từ  $Mn_5Ge_3$ .

Lắng đọng epitaxy pha rắn (Solid Phase Epitaxy - SPE) là phương pháp được sử dụng để chế tạo các mẫu trong nghiên cứu này. Các màng được chế tạo trong môi trường chân không siêu cao ở nhiệt độ phòng, sau đó ủ nhiệt. Đối với hệ mẫu MnGe, kỹ thuật SPE cho thấy những ưu điểm nổi bật đó là: kiểm soát chặt chẽ nhiệt độ và thời gian ủ nhiệt, xác định chính xác các pha cấu trúc được hình thành thông qua các kỹ thuật phân tích trong chân không siêu cao (RHEED). Quá trình ủ nhiệt không chỉ liên quan đến sự khuếch tán mà còn cả các bước phản ứng tạo mầm và phản ứng hóa học để tạo ra các liên hóa học trong hợp chất. Việc lắng đọng các màng  $Mn_5Ge_3C_x$  được thực hiện trên một đế Ge (111) với bề mặt sạch. Trước tiên chúng tôi cho lắng đọng một lớp đệm khoảng 40 nm nhằm tạo ra một bề mặt tốt nhất cho việc lắng đọng lớp màng. Tiếp theo chúng tôi cho lắng đọng đồng thời các nguyên tử Mn và C ở nhiệt độ phòng, sau đó ủ nhiệt ở 450 °C trong thời gian 10 đến 15 phút để kích hoạt sự khuếch tán giữa nguyên tử C, Mn và Ge. Các nguyên tử carbon có bán kính nguyên tử đủ nhỏ nên có nhiều khả năng kết hợp được vào màng epitaxy  $Mn_5Ge_3$  thông qua quá trình phát triển này. Hàm lượng carbon được điều chỉnh sao cho giá trị x thay đổi trong khoảng từ 0,2 đến 0,9. Việc tăng nhiệt độ được thực hiện theo các bước 10°C /phút để ngăn chặn sự khuếch tán nhanh chóng và đảm bảo độ kết tinh tốt của lớp màng.

### 3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

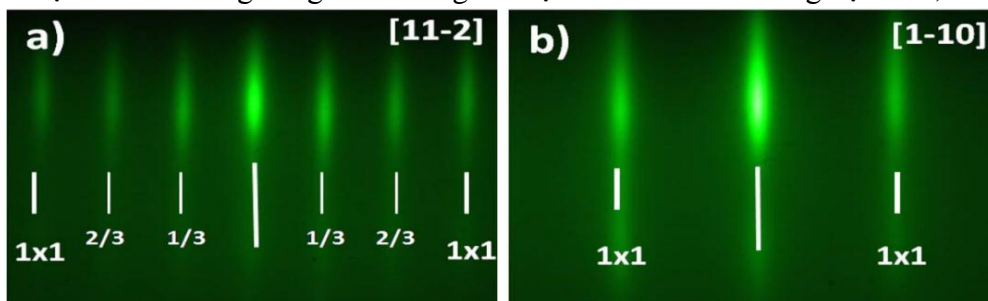
Cấu trúc của các màng  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3\text{C}_x$  được xác định dựa vào việc phân tích các kết quả từ RHEED, TEM độ phân giải cao và giản độ nhiễu xạ tia X. Dựa vào kết quả thu được từ thực nghiệm, chúng tôi chia ra hai khoảng nồng độ carbon pha tạp được xác định theo chất lượng tinh thể của các màng:  $0,1 < x \leq 0,6$  và  $0,6 < x < 0,9$ .

#### 3.1. Nồng độ C: $x \leq 0,6$

Như chúng ta đã biết, RHEED là kỹ thuật quan sát tại chỗ quá trình phát triển của các mẫu và được gắn vào bên trong thiết bị chế tạo epitaxy chùm phân tử (MBE). Các hình ảnh thu được trên màn hình của RHEED cho chúng ta biết thông tin về kiểu tăng trưởng (2D, 3D hay hỗn hợp) và cấu trúc của các màng. Trong trường hợp các màng có cùng kiểu tăng trưởng và cùng cấu trúc tinh thể thì hình ảnh thu được từ RHEED là hoàn toàn như nhau.

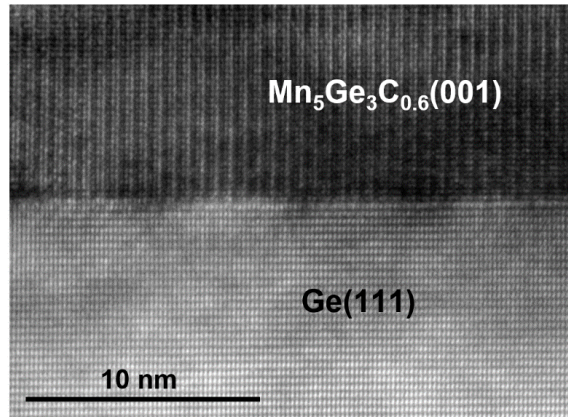
Trong khoảng nồng độ này, quá trình làm thực nghiệm chúng tôi đã chế tạo các mẫu  $x = 0,2$ ;  $0,4$  và  $0,6$ . Tuy nhiên, kết quả quan sát hình ảnh RHEED trong quá trình thực nghiệm cho thấy, ở nồng độ  $x = 0,2$ ;  $0,4$  và  $0,6$  các màng đều phát triển dạng 2D và vẫn giữ cấu trúc như của pha  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3$ . Hơn nữa, mục tiêu của nghiên cứu này là tìm ra được nồng độ C pha tạp sao cho màng vẫn giữ được cấu trúc tinh thể dạng  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3$ , nên trong phần này chúng tôi chỉ đưa ra những kết quả của trường hợp có nồng độ pha tạp carbon cao nhất tương ứng với  $x = 0,6$ .

Hình 1 biểu thị ảnh RHEED đặc trưng quan sát được trong quá trình phát triển của màng  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3\text{C}_x$  với  $x = 0,6$ . Hình ảnh RHEED theo hướng  $[11-2]$  xuất hiện các sọc  $1/3$  và  $2/3$  chính là đặc điểm của sự tái cấu trúc bề mặt kiểu  $(3 \times 3)\mathbf{R}30^\circ$  của màng  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3$  xuất hiện sau khi được ủ ở nhiệt độ  $450^\circ\text{C}$ . Ngoài ra, các phép đo khoảng cách giữa các sọc  $1 \times 1$  cho thấy cùng một giá trị thu được đối với màng không chứa carbon  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3$ . Kết quả này cho thấy rằng màng là đơn tinh thể và kết hợp hoàn hảo với đế, đồng thời cũng chứng minh rằng việc pha tạp carbon trong trường hợp này không làm thay đổi nhiệt độ hình thành pha cấu trúc cũng như cấu trúc bề mặt và cả khu vực giao diện với đế Ge (111). Các sọc thể hiện trên RHEED với cường độ, độ nét và độ dài rất rõ ràng cũng chỉ ra rằng bề mặt vẫn là 2D đến nồng độ  $x = 0,6$ .



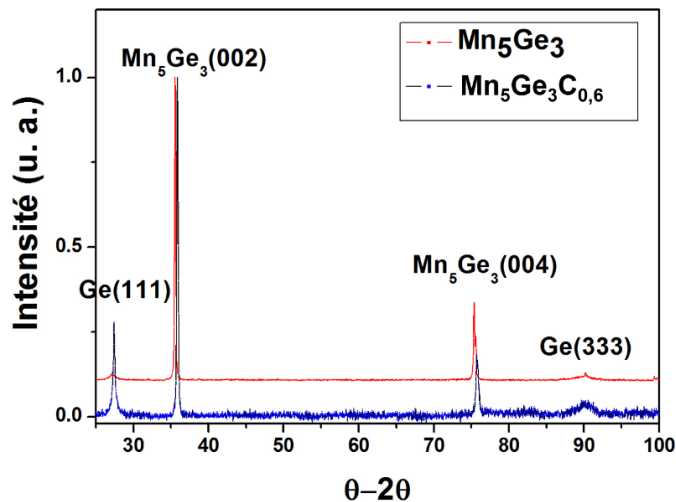
Hình 1. Ảnh RHEED chụp dọc theo hướng  $[11-2]$  (a) và hướng  $[1-10]$  (b) sau khi chế tạo màng  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3\text{C}_{0,6}$

Cấu trúc tinh thể của màng được hiển thị bằng hình ảnh TEM độ phân giải cao trong hình 2 cho thấy màng là đơn tinh thể với chất lượng rất tốt và giao diện thay đổi đột ngột ở quy mô nguyên tử, không có khuyết tật nào xuất hiện trong màng. Kết quả này phù hợp với các quan sát của RHEED, chỉ ra rằng sự phát triển của màng  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3\text{C}_x$  với  $x \leq 0,6$  được kiểm soát hoàn hảo trên đế Ge (111).



Hình 2. Ảnh TEM độ phân giải cao của màng  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3\text{C}_{0,6}$

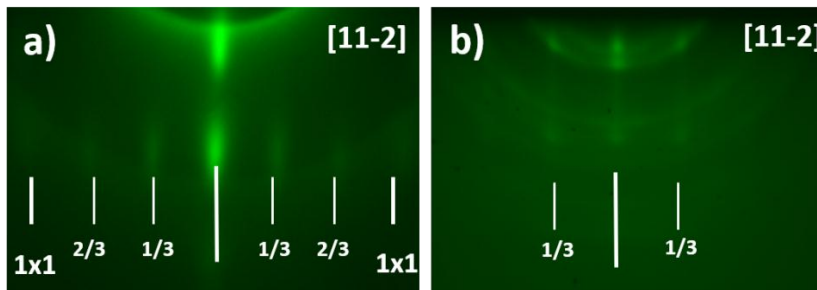
Những kết quả trên được khẳng định lại bằng phép phân tích nhiễu xạ tia X. Hình 3 cho thấy sự so sánh phổ nhiễu xạ của lớp  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3\text{C}_{0,6}$  với lớp không có carbon  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3$ . Tính đơn tinh thể của màng được khẳng định bởi sự có mặt của các đỉnh  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3$  (002) và (004) chứng tỏ các màng có cùng cấu hình cấu trúc và hướng [001] vuông góc với mặt phẳng của màng. Hơn nữa, không cực đại nào khác xuất hiện cho thấy rằng carbon không làm thay đổi trạng thái ứng suất trong màng  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3$ . Những đặc điểm cấu trúc này xác nhận rằng carbon kết hợp không gây ra bất kỳ biến dạng nào của các tham số mạng  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3$  cho tới nồng độ pha tạp  $x = 0,6$ .



Hình 3. Giảm đồ nhiễu xạ tia X của màng  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3\text{C}_{0,6}$  mọc trên đế Ge (111)

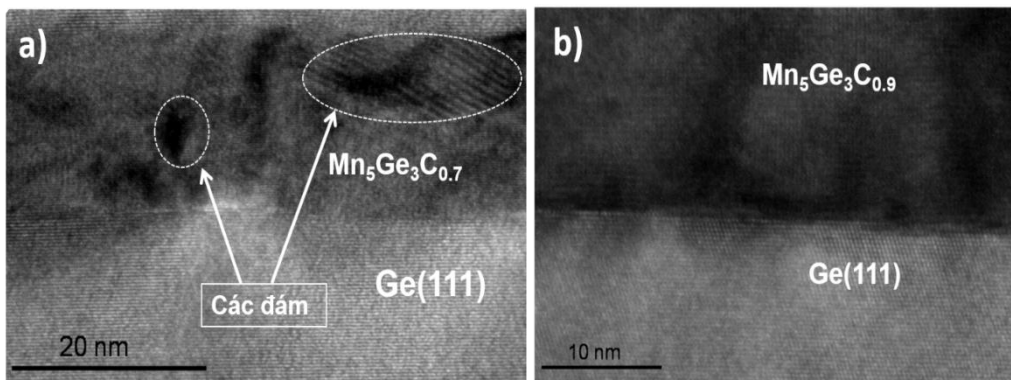
### 3.2. Nồng độ C: $x > 0,6$

Phân tích hình ảnh RHEED thu được khi chụp các màng  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3\text{C}_{0,7}$  và  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3\text{C}_{0,9}$  theo hướng [11-2] cho thấy, các sọc 1/3 và 2/3 trong hình 4a và 4b thể hiện sự tái cấu trúc bề mặt kiểu  $(3 \times 3)\mathbf{R}30^\circ$  của màng  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3$  gần như không còn. Cả hình 4a và 4b đều chỉ bao gồm các đốm chứng tỏ bề mặt màng gồ ghề và màng được phát triển dạng 3D. Tuy nhiên, một số đốm trên hình 4a có hình dạng kéo dài trùng với các sọc 1/3 và 2/3 nên nhiều khả năng trong màng vẫn tồn tại các đám có cấu trúc của  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3$ . Nhìn chung, đây chính là hình ảnh RHEED của một màng đa tinh thể. Ở hình 4b, các đốm sáng có cường độ khá yếu và trên hình tồn tại các vòng đặc trưng cho các cấu trúc vô định hình, vì vậy có thể dự đoán màng  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3\text{C}_{0,9}$  là vô định hình và ở một vài vị trí vẫn tồn tại các đám tinh thể  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3$ .



**Hình 4. Hình ảnh RHEED chụp dọc theo hướng [11-2] của màng  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3\text{C}_x$  với  $x = 0,7$  (a) và  $x = 0,9$  (b)**

Ảnh chụp TEM theo mặt cắt ngang của 15nm màng  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3\text{C}_{0,7}$  và  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3\text{C}_{0,9}$  thể hiện sự không đồng nhất trong cấu trúc của lớp màng. Trong màng  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3\text{C}_{0,7}$  xuất hiện các đám có chất lượng tinh thể tốt, tuy nhiên chỉ tồn tại cục bộ một vài vị trí. Cấu trúc của màng  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3\text{C}_{0,9}$  qua quan sát trên hình 5a thể hiện dạng vô định hình. Có thể tồn tại các đám kết tinh nhưng không quan sát được ở độ phân giải này của ảnh TEM. Như vậy, các kết quả này hoàn toàn phù hợp với những quan sát từ ảnh RHEED trên hình 4a và 4b.



**Hình 5. Ảnh TEM tổng quát của màng  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3\text{C}_{0,7}$  (a) và của màng  $\text{Mn}_5\text{Ge}_3\text{C}_{0,9}$  (b).**

Theo nghiên cứu lý thuyết, khi pha tạp C vào màng  $Mn_5Ge_3$  thì nguyên tử C với bán kính nhỏ hơn sẽ khuếch tán vào các vị trí xen kẽ giữa hai nguyên tử  $Mn_{II}$  trong mạng tinh thể [6,10]. Vì thế, sự thay đổi cấu trúc khi tăng nồng độ C có thể là do số các vị trí xen kẽ còn trống trong mạng tinh thể chỉ đủ cho một lượng C nhất định đi vào cấu trúc. Khi nồng độ C tăng lên thì lượng C dư thừa càng lớn và dẫn đến cấu trúc  $Mn_5Ge_3$  bị phá vỡ. Một thông tin quan trọng khác mang lại từ ảnh chụp TEM đó là: giao diện giữa màng và đế gồ ghề, không rõ nét. So sánh hai hình 5a và 5b cho thấy, khi nồng độ pha tạp C càng tăng thì giao diện giữa màng và đế càng bị mở rộng. Như vậy, những khác biệt này cho thấy một sự thay đổi rõ ràng về mặt cấu trúc khi pha tạp C bắt đầu từ nồng độ  $x = 0,7$ .

#### 4. KẾT LUẬN

Như vậy, tổng hợp các kết quả phân tích cấu trúc ở trên chúng ta có thể kết luận rằng: Việc pha tạp carbon đồng thời trong quá trình chế tạo màng  $Mn_5Ge_3$  hoàn toàn có thực hiện được mà không làm thay đổi cấu trúc của màng với nồng độ carbon  $x = 0,6$ ; Khi nồng độ carbon pha tạp vượt qua giá trị này, cấu trúc của màng bị thay đổi, không còn là đơn tinh thể  $Mn_5Ge_3$  mà sẽ là đa tinh thể hoặc vô định hình. Việc đưa ra được nồng độ pha tạp carbon tối ưu nhất để vừa có thể làm tăng nhiệt độ chuyển pha và lại vẫn giữ được cấu trúc dạng đơn tinh thể  $Mn_5Ge_3$  của màng cần phải có thêm các kết quả đo tính chất từ của các màng. Đây sẽ là nghiên cứu tiếp theo của chúng tôi.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] C. Timm (2003), Disorder effects in diluted magnetic semiconductors, *Journal of Physics: Condensed Matter*, 15, R1865.
- [2] O.M.J. van't Erve, G. Kioseoglou, A.T.Hanbicki, C.H. Li, B.T. Jonker, R.Mallory, M. Yasar, A. Petrou (2004), Comparison of Fe/Schottky and Fe/Al 2 O 3 tunnel barrier contacts electrical spin injection into GaAs, *Applied Physics Letters*, 84 4334.
- [3] Y.D.Park, A.T.Hanbicki, S.C.Erwin, C.S.Hellberg, J.M.Sullivan, J.E.Mattson, T.F. Ambrose, A. Wilson, G. Spanos, B.T. Jonker (2002), A group-IV ferromagnetic semiconductor:  $MnxGe_{1-x}$ , *Science* 295-651.
- [4] Y. Ando, K. Hamaya, K. Kasahara, Y. Kishi, K. Ueda, K. Sawano, T. Sadoh, M.Miyao (2009), Electrical injection and detection of spin-polarized electrons in silicon through an Schottky tunnel barrier, *Applied Physics Letters*, 94, 182105.
- [5] K. Hamaya, K. Ueda, Y. Kishi, Y. Ando, T. Sadoh, M. Miyao (2008), Epitaxial ferromagnetic Fe 3 S / Si(111) structures with high-quality heterointerfaces, *Applied Physics Letters*, 93, 132117.

- [6] T.Y. Chen, C.L. Chien, C. Petrovic (2007), Enhanced Curie temperature and spin polarization in  $Mn_4FeGe_3$ , *Applied Physics Letters*, 91, 142505.
- [7] R. Jaafar, Y. Nehme, D. Berling, J.L. Bubendorff, A. Mehdaoui, C. Pirri, G. Garreau, C. Uhlaq-Bouillet (2008), Room-temperature ferromagnetism in single crystal  $Fe_{1.7}Ge$  thin films of high thermal stability grown on Ge(111), *Applied Physics Letters*, 93, 033114.
- [8] C. Sürgers, K. Potzger, T. Strache, W. Möller, G. Fischer, N. Joshi, H.v.Löhneysen (2008), Magnetic order by C-ion implantation into and its lateral modification, *Applied Physics Letters*, 93, 062503.
- [9] C. Zeng, S.C. Erwin, L.C. Feldman, A.P. Li, R. Jin, Y. Song, J.R. Thompson, H.H. Weiering (2003), Epitaxial ferromagnetic  $Mn_5Ge_3$  on Ge(111), *Applied Physics Letters*, 83, 5002.
- [10] C. Zeng, W. Zhu, S.C. Erwin, Z. Zhang, H.H. Weiering (2004), Initial stages of Mn adsorption on Ge (111), *Physical Review B*, 70, 205340.
- [11] C-E Dutoit, V O Dolocan, M Kuzmin, L Michez, M Petit, V Le Thanh, B Pigeau and S Bertaina (2016),  $Mn_5Ge_3C_{0.6}/Ge(111)$  Schottky contacts tuned by an n-type ultra-shallow doping layer, *Journal of Physics D: Applied Physics* 49 - 4.
- [12] I. Slipukhina, E. Arras, Ph. Mavropoulos, P. Pochet (2009), Simulation of the enhanced Curie temperature in  $Mn_5Ge_3C_x$  compounds, *Applied Physics Letters*, 94, 192505.
- [13] S. Olive-mendez, A. Spiesser, L.A. Michez, V. Le Thanh, A. Glachant, J. Derrien, T. Devillers, A. Barski, M. Jamet (2008), Epitaxial growth of  $Mn_5Ge_3/Ge(111)$  heterostructures for spin injection, *Thin Solid Films*, 517191.
- [14] Sion F. Olive-Méndez, Ricardo López Antón, Jesús L. A. Ponce-Ruiz and José T. Holguín-Momaca (2018), High anisotropy on epitaxial C-doped  $Mn_5Ge_3$  thin films grown on Ge(001), *Apply Physics Letter*, 113, 112408.
- [15] A. Stroppa, G. Kresse, A. Continenza (2008), Spin polarization tuning in  $Mn_{5-x}Fe_xGe_3$ , *Applied Physics Letters*, 93 092502.
- [16] A. Spiesser, I. Slipukhina, M.-T. Dau, E. Arras, V. Le Thanh, L. Michez, P.Pochet, H. Saito, S. Yuasa, M. Jamet, and J. Derrien (2011), Control of magnetic properties of epitaxial  $Mn_5Ge_3C_x$  films induced by carbon doping, *Physical Review B*, 84, 165203
- [17] Minh-Tuan Dau, Vinh Le Thanh, Lisa A Michez, Matthieu Petit, Thi-Giang Le, Omar Abbes, Aurelie Spiesser, Alain Ranguis (2012), An unusual phenomenon of surface reaction observed during Ge overgrowth on  $Mn_5Ge_3/Ge(111)$  heterostructures, *New Journal of Physics*, 14, 103020.

**STUDY THE EFFECTS OF CARBON CONCENTRATION  
ON STRUCTURAL PROPERTIES OF  $Mn_5Ge_3$   
THIN FILMS GROWN ON Ge(111)**

**Le Thi Giang**

**ABSTRACT**

*By combining the results from the structural analysis of Reflection High Energy Electronic Diffraction, High resolution-transmission electron microscopy (HR-TEM) and X-Ray Diffraction, the maximum concentration of carbon which can be doped into  $Mn_5Ge_3$  films without changing their structure has been determined to be  $x= 0.6$ . Exceeding this concentration, the films structure turns into polycrystalline or amorphous corresponding to carbon concentrations  $x = 0.7$  and  $0.9$ . These change due to the fact that C at these concentrations has exceeded the permissible threshold, leading to excess C destroying the film structure.*

**Keyword:** *Thin films,  $Mn_5Ge_3$ , carbon concentration.*

\* Ngày nộp bài: 29/11/2019; Ngày gửi phản biện: 5/12/2019; Ngày duyệt đăng: 28/10/2020

\* *Lời cảm ơn: Nghiên cứu này được thực hiện bởi kinh phí thuộc đề tài cấp cơ sở của Trường Đại học Hồng Đức có mã số ĐT-2018-43. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn các đồng nghiệp thuộc nhóm nghiên cứu vật liệu không đồng nhất nền Si và Ge của GS. TSKH. Lê Thành Vinh tại Trung tâm liên ngành về khoa học nano Marseille, Cộng hòa Pháp đã giúp đỡ chúng tôi trong quá trình thực hiện nghiên cứu này.*

# VÀNH VỚI CÁC ĐIỀU KIỆN CỦA LINH HÓA TỬ TRÁI MỊN

Hoàng Đình Hải<sup>1</sup>, Vũ Thị Nhi<sup>2</sup>, Nguyễn Thị Hương<sup>3</sup>

## TÓM TẮT

Việc nghiên cứu các đặc trưng vành thông qua căn Jacobson gợi dẫn các nghiên cứu mới về linh hóa tử trái mịn và các ứng dụng của nó. Linh hóa tử trái mịn của một vành đã được W.K. Nicholson, Yiqiang Zhou trình bày trong [3]. Một Idêan phải  $A$  của vành  $R$  được gọi là mịn nếu với mọi Idêan phải  $B$  của  $R$  mà  $A + B = R$  thì  $B = R$ ;  $A$  được gọi là linh hóa tử trái mịn nếu  $l(B) = 0$  ( $l(B)$  là linh hóa tử trái của  $B$ ). Mục đích của bài báo là nghiên cứu về linh hóa tử trái mịn mà W.K. Nicholson, Yiqiang Zhou đã đưa ra từ đó khai thác một số đặc trưng vành, chẳng hạn lớp vành Ikeda - Nakayama, lớp vành Artin, lớp vành  $\pi$ - chính quy mạnh với các điều kiện linh hóa tử trái mịn.

**Từ khóa:** Idêan phải mịn, linh hóa tử, căn Jacobson.

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong bài báo,  $R$  là vành bên phải, kết hợp, có đơn vị  $1 \neq 0$ . Tập con  $I$  của vành  $R$  được gọi là Idêan phải nếu  $IR = I$ , và gọi là Idêan trái nếu  $RI = I$ . Nếu  $I$  vừa là Idêan phải vừa là Idêan trái thì gọi là Idêan của vành  $R$ , khi đó ta viết  $I \triangleleft R$ . Ta nói Idêan  $I$  là cốt yếu trong  $R$  và kí hiệu là  $I \triangleleft^* R$  nếu  $I$  có giao khác không với mọi Idêan khác không của  $R$ . Chúng ta kí hiệu căn Jacobson của  $R$  là  $J(R) = J$ ; và  $S_r, S_l, Z_r, Z_l$  lần lượt kí hiệu cho đế bên phải, đế bên trái, Idêan kì dị phải, Idêan kì dị trái của  $R$ . Linh hóa tử trái của Idêan  $I$  là  $l(I) = \{r \in R \mid rx = 0, \forall x \in I\}$ . Ta nhắc lại rằng một Idêan phải  $A$  của vành  $R$  được gọi là mịn nếu với mọi Idêan phải  $B$  của  $R$  mà  $A + B = R$  thì  $B = R$  và ta kí hiệu là  $A \triangleleft^0 R$ . Phần tử  $r \in R$  được gọi là lũy linh (tựa lũy linh) nếu tồn tại  $n \in \mathbb{N}$  sao cho  $r^n = 0$  ( $r^n = r^{n+i}, \forall i \geq 0$ ).  $R$  là vành  $\pi$ - chính quy mạnh nếu với mọi  $r \in R$  dãy chuyền  $rR \supseteq r^2R \supseteq r^3R \supseteq \dots$  đều dừng, điều này tương đương với dãy chuyền  $Rr \supseteq Rr^2 \supseteq Rr^3 \supseteq \dots$  đều dừng, kéo theo mọi vành hoàn chỉnh bên trái hay bên phải đều là vành  $\pi$ - chính quy mạnh.

## 2. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

### 2.1. Linh hóa tử và linh hóa tử trái mịn

**Định nghĩa 1.** Cho  $R$  là một vành,  $M$  là một  $R$ -môđun trái,  $S$  là một tập con nào đó của  $M$ . Linh hóa tử của  $S$  trong  $R$  được định nghĩa là tập hợp

$$Ann_R(S) = \{r \in R \mid rx = 0, \text{ với mọi } x \in S\}$$

<sup>1</sup> Trung tâm Giáo dục Quốc tế, Trường Đại học Hồng Đức

<sup>2</sup> Học viên cao học lớp Đại số và Lý thuyết số K11, khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức



**Bổ đề 1.** Linh hóa tử của  $S$  trong  $R$  là một Idean của  $R$ .

*Chứng minh:* Thật vậy,

Với mọi  $r, s \in \text{Ann}_R(S)$  và  $x \in S$ ,  $(r + s)x = rx + sx = 0$ . Do đó  $r + s \in \text{Ann}_R(S)$ .

Với mọi  $r \in R, s \in \text{Ann}_R(S), x \in S$ ,  $(rs)x = r(sx) = r \cdot 0 = 0$ .

Điều đó chứng tỏ  $rs \in \text{Ann}_R(S)$ .

Với mọi  $r \in R, s \in \text{Ann}_R(S), x \in S$ ,  $(sr)x = s(rx) = 0$ . Chứng tỏ  $sr \in \text{Ann}_R(S)$ .

Vậy  $\text{Ann}_R(S)$  là một Idean của  $R$ .

**Bổ đề 2.** Cho  $R$  là một miền nguyên và  $M$  là một  $R$ -môđun xoắn trái hữu hạn sinh. Khi đó môđun  $M$  có một linh hóa tử khác không.

*Chứng minh:* Theo giả thiết  $M$  là một  $R$ -môđun hữu hạn sinh nên tồn tại tập sinh hữu hạn  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset M$  sao cho  $M = RA$ . Do  $M$  là một  $R$ -môđun xoắn trái nên với mỗi  $a_i \in A \subset M$ , tồn tại phần tử khác không  $r_i \in R$  sao cho  $r_i a_i = 0$ . Chúng ta sẽ chứng minh phần tử khác không  $r \in R$  với  $r := r_1 r_2 \dots r_n$  thỏa mãn  $rx = 0$  với mọi  $x \in M$ . Với mỗi  $x \in M$ ,  $x = s_1 a_1 + s_2 a_2 + \dots + s_n a_n$ ,  $a_i \in A, s_i \in R$ . Do  $R$  là một miền nguyên, và  $r_i a_i = 0$ , ta có:

$$\begin{aligned} rx &= r_1 r_2 \dots r_n (s_1 a_1 + s_2 a_2 + \dots + s_n a_n) \\ &= r_2 \dots r_n s_1 (r_1 a_1) + r_1 r_3 \dots r_n s_2 (r_2 a_2) + \dots + r_1 r_2 \dots r_n s_n (r_n a_n) = 0. \end{aligned}$$

**Nhận xét 1.** Bổ đề 2 không còn đúng khi bỏ đi giả thiết hữu hạn sinh đối với môđun  $M$ .

*Chứng minh:* Ta có  $R = \mathbb{Z}$  - vành các số nguyên, là một miền nguyên. Xét  $\mathbb{Z}$ -môđun  $M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}/2^i \mathbb{Z}$ . Với mỗi  $a \in M$ ,

$$a = (a_1 + \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, a_2 + \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z}, \dots, a_k + \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}, 0, 0, \dots), \text{ trong đó } a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Z}.$$

Điều đó suy ra  $2^k a = 0$  và do đó  $M$  là  $R$ -môđun xoắn trái.

Bây giờ giả sử rằng  $r \in \text{Ann}_R(M)$ . Chọn số nguyên  $k$  sao cho  $r < 2^k$ . Xét phần tử  $a = (0, 0, \dots, 1 + \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}, 0, 0, \dots)$  trong  $M$ , có duy nhất thành phần thứ  $k$  khác 0.  $r \in \text{Ann}_R(M)$  nên  $ra = (0, 0, \dots, r + \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}, 0, 0, \dots) = 0$  do  $r < 2^k$ . Do đó đòi hỏi  $r = 0$ . Vậy  $\text{Ann}_R(M) = 0$ .

**Định nghĩa 2.** Cho vành  $R$  với đơn vị 1. Một phần tử  $m$  của  $R$ -môđun  $M$  được gọi là phần tử xoắn nếu  $rm = 0$  với  $r \neq 0$  nào đó thuộc  $R$ . Tập hợp các phần tử xoắn của  $M$  kí hiệu là  $\text{Tor}(M) = \{m \in M \mid rm = 0, \text{ với } 0 \neq r \text{ nào đó của } R\}$ .

**Nhận xét 2.** Cho vành  $R$  với đơn vị 1 và  $R$ -môđun  $M$ ,  $I$  là một Idean của  $R$ . Gọi  $M'$  là tập con các phần tử  $a$  của  $M$  sao cho chúng bị triệt tiêu bởi lũy thừa  $I^k$  nào đó của  $I$ , bậc lũy thừa  $k$  tùy thuộc phần tử  $a$ . Khi đó  $M'$  là một môđun con của  $M$ .

*Chứng minh:* Thật vậy, đặt  $N_i := \{m \in M \mid sm = 0, \text{ với mọi } s \in I^i\}$ ,  $N_i$  chứa các phần tử của  $M$  bị triệt tiêu bởi lũy thừa  $I^i$ .

Ta có các nhận định sau:

- 1) Mỗi tập con  $N_i$  là một môđun con của  $M$
- 2) Ta có dãy chuyền tăng  $N_1 \subset N_2 \subset \dots$ , và
- 3)  $M' = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$

Ta lần lượt chứng minh cho từng nhận định trên.

1) Cho  $a, b \in N_i$  và  $r \in R$ . Với mọi  $s \in I^i$ , ta có  $s(a + b) = sa + sb = 0$  bởi vì  $a, b \in N$  bị triệt tiêu bởi lũy thừa  $I^i$ . Hơn nữa  $sra = (sr)a = 0$  do  $sr \in I^i$  bởi  $I^i$  là một Idêan. Vì thế, mỗi tập con  $N_i$  là một môđun con của  $M$ .

2) Ta đề ý rằng  $I^{i+1} = I^i \times I \subset I^i$ . Do đó  $N_i \subset N_{i+1}$  với mọi  $i$ , nghĩa là có dãy chuyển tăng  $N_1 \subset N_2 \subset \dots$ ,

3) Do hợp các môđun con thuộc dãy chuyển tăng của  $M$  là một môđun con của  $M$ . Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

**Định nghĩa 3.** Một Idêan phải  $A$  của vành  $R$  được gọi là một linh hóa tử trái mịn của vành  $R$  nếu với mọi Idêan phải  $B$  của  $R$  mà  $A + B = R$  thì  $l(B) = 0$  và ta kí hiệu  $A \triangleleft^{las} R$ .

Bằng cách tương tự, ta nói một Idêan phải  $A$  là một linh hóa tử phải mịn của vành  $R$  nếu trong định nghĩa trên  $l(B) = 0$  được thay bằng  $r(B) = \{r \in R \mid xr = 0, \forall x \in I\} = 0$  và kí hiệu là  $A \triangleleft^{ras} R$ .

Nếu Idêan  $A$  vừa là linh hóa tử trái mịn vừa là linh hóa tử phải mịn của  $R$  thì ta nói  $A$  là linh hóa tử mịn của  $R$ , kí hiệu  $A \triangleleft^{as} R$ .

**Nhận xét 3.** Mỗi Idêan phải mịn là linh hóa tử trái mịn

*Chứng minh:* Giả sử, Idêan phải  $A$  của vành  $R$  là mịn thì với mọi Idêan phải  $B$  của  $R$  mà  $A + B = R$  ta có  $B = R$ . Do  $l(R) = 0$  nên  $A$  là linh hóa tử trái mịn của  $R$ .

**Ví dụ 1.** Trong vành số nguyên  $\mathbb{Z}$ , với mọi  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$ .

**Ví dụ 2.** Trong vành thương  $\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_m$ , mọi Idêan của  $\mathbb{Z}_m$  đều có dạng  $\mathbb{Z}_n$  với  $n \mid m$ .

**Ví dụ 3.** Trong vành số nguyên  $\mathbb{Z}$ , thì  $2\mathbb{Z} \triangleleft^0 \mathbb{Z}$ .

Thật vậy, giả sử  $I \triangleleft \mathbb{Z}$  và  $2\mathbb{Z} + I = \mathbb{Z}$ . Do  $1 \notin 2\mathbb{Z}$  nên  $1 \in I$ . Nhưng do  $I \triangleleft \mathbb{Z}$  nên  $I = \mathbb{Z}$ , vậy  $2\mathbb{Z} \triangleleft^0 \mathbb{Z}$ .

**Nhận xét 4.** Điều ngược lại của nhận xét 3 là không đúng.

*Chứng minh:* Thật vậy, ta xét phản ví dụ sau:

**Ví dụ 4.** Cho vành  $R = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$  trong đó  $F$  là một trường. Idêan  $K = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  là linh hóa tử trái mịn nhưng không là Idêan mịn của  $R$ . Thật vậy, giả sử  $K + I = R$ .  $I$  phải chứa Idêan  $N = \begin{bmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$  có linh hóa tử trái  $l(N) = 0$  do đó  $l(I) = 0$ . Vậy Idêan  $K = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  là linh hóa tử trái mịn. Tuy nhiên từ đẳng thức  $K + N = R$ , trong khi  $N \neq R$ , chứng tỏ  $K$  không là Idêan mịn của  $R$ .

**Ví dụ 5.** Vành  $R$  là Idêan phải của chính nó, nhưng không là linh hóa tử trái mịn.

Thật vậy,  $R + 0 = R$  trong khi  $l(0) = R$  chứng tỏ  $R$  không là linh hóa tử trái mịn.

**Ví dụ 6.** Khi  $R$  là một miền nguyên thì  $R$  không có ước của 0, do đó mọi Idêan phải của  $R$  đều là linh hóa tử trái mịn.

Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là tổng của hai linh hóa tử trái mịn có là linh hóa tử trái mịn không?

Trước khi tìm câu trả lời cho câu hỏi này, chúng ta xem xét mệnh đề sau:

**Mệnh đề 1.** Cho  $A, B$  là các Idêan phải của vành  $R$  sao cho  $A \triangleleft^0 R, B \triangleleft^{las} R$ . Thế thì  $A + B = B + A \triangleleft^{las} R$ .

*Chứng minh*

Thật vậy,  $A \triangleleft^0 R$  nên  $(A + B) + X = R$  thì  $B + X = R$ . Do  $B \triangleleft^{las} R$  nên  $l(X) = 0$ . Đẳng thức này chứng tỏ  $A + B = B + A \triangleleft^{las} R$ .

Do  $l(R) = 0$  nên mọi Idêan phải mịn của  $R$  đều là linh hóa tử trái mịn. Từ đó Mệnh đề 1 như là một trường hợp riêng của giả thiết: “tổng của hai linh hóa tử trái mịn là linh hóa tử trái mịn”.

Ta biết rằng căn Jacobson  $J(R) = J$  của  $R$  là tổng của các Idêan phải mịn của vành  $R$ , nên Nhận xét 3 chúng ta có kết quả sau:

**Mệnh đề 2.** Căn Jacobson  $J(R) = J$  của vành  $R$  là một linh hóa tử trái mịn.

**Ví dụ 7.** Xét  $Z_l = Z_l(R) = \{z \in R | l(z) \triangleleft^* R\}$ . Ta dễ thấy rằng  $Z_l(R)$  là linh hóa tử trái mịn của  $R$  và còn được gọi là Idêan trái kì dị của  $R$ .

**Mệnh đề 3 [3, Proposition 2].** Cho  $K$  là một linh hóa tử trái mịn của vành  $R$ , khi đó:  $K + J + Z_l \triangleleft^{las} R$ .

*Chứng minh*

Giả sử  $K + J + Z_l + X = R$ . Do  $J$  mịn nên  $K + Z_l + X = R$ . Tồn tại  $k \in K, z \in Z_l, x \in X$  sao cho  $k + z + x = 1$ . Do  $K \triangleleft^{las} R$  nên  $l(Z_l + X) = 0$ . Điều này dẫn đến  $0 = l(zR + X) = l(z) \cap l(X)$ . Do  $z \in Z_l$  là phần tử kì dị trái của  $R$  nên  $l(z)$  cốt yếu trong  $R$ . Vì thế đẳng thức  $l(z) \cap l(X) = 0$  kéo theo  $l(X) = 0$ , chứng tỏ  $K + J + Z_l \triangleleft^{las} R$ .

**Mệnh đề 4.** Nếu linh hóa tử trái của Idêan phải  $T$  là cốt yếu trong  $R$  thì  $rl(T) \triangleleft^{las} R$ .

*Chứng minh*

Giả sử  $rl(T) + X = R$  trong đó  $X$  là Idêan phải nào đó của  $R$ . Ta có  $0 = l(rl(T)) \cap l(X) = l(T) \cap l(X)$ . Do  $l(T)$  cốt yếu trong  $R$  nên  $l(X) = 0$  chứng tỏ  $rl(T) \triangleleft^{las} R$ .

**Nhận xét 5.** Dễ dàng thấy rằng linh hóa tử trái mịn có tính chất di truyền, nghĩa là nếu  $A \triangleleft B$  và  $B \triangleleft^{las} R$  thì  $A \triangleleft^{las} R$ .

Từ Mệnh đề 4 và Nhận xét 3 ta có:

**Hệ quả 1.** Nếu  $l(T)$  cốt yếu trong  $R$  thì Idêan phải  $T$  sẽ là linh hóa tử trái mịn của vành  $R$ .

Tìm hiểu chiều ngược lại của Mệnh đề 4 ta thấy rằng, nếu  $rl(T) \triangleleft^{las} R$  và  $r(l(T) \cap R_b) = r(l(T)) + r(b)$  với mọi Idêan phải  $T$  của  $R, b \in R$  thì  $l(T) \triangleleft^* R$ . Thật vậy, với mọi  $0 \neq b \in R$  mà  $l(T) \cap R_b = 0$  thì  $r(l(T)) + r(b) = R$ . Do  $rl(T) \triangleleft^{las} R$  nên  $l(r(b)) = 0$ . Lại có  $R_b \ll l(r(b))$ , do đó  $b = 0$ . Mâu thuẫn này chứng tỏ  $l(T) \cap R_b \neq 0$  hay  $l(T) \triangleleft^* R$ .

Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là tìm đặc trưng của linh hóa tử trái mịn  $kR$ , ta có các điều kiện tương đương sau đã được trình bày trong [3].

**Mệnh đề 5:** Cho  $k \in R$  thì  $kR \triangleleft^{las} R$  khi và chỉ khi một trong các điều kiện sau xảy ra:

- 1) Với mọi  $0 \neq b \in R$  thì  $bkR \subset bR$ .
- 2) Với mọi  $r \in R$  ta có  $l(1 - kr) = 0$ .
- 3) Với mọi  $r \in R$  ta có  $l(1 - rk) = 0$ .
- 4) Với mọi  $r \in R$  ta có  $l(k - krk) = l(k)$ .

*Chứng minh:* Chúng ta chứng minh theo lược đồ sau:

$$kR \triangleleft^{las} R \Rightarrow 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow kR \triangleleft^{las} R.$$

$$kR \triangleleft^{las} R \Rightarrow 1)$$

Với  $0 \neq b \in R$  ta có  $b \notin bkR$ . Thật vậy, nếu  $b \in bkR$  thì  $b = bkr, r \in R$ .

Điều đó suy ra  $b(1 - kr) = 0$ , hay  $b \in l(1 - kr)$ .

Do  $kR \triangleleft^{las} R$  và  $kR + (1 - kr)R = R$  nên  $l(1 - kr) = 0$ .

Do đó  $b = 0$ . Vậy  $0 \neq b \in R$  thì  $b \notin bkR$  và do đó  $bkR \subset bR$ .

$$1) \Rightarrow 2)$$

Thật vậy, lấy bất kì  $b \in l(1 - kr)$  với mọi  $r \in R$ .

Thế thì  $b(1 - kr) = 0$  hay  $b = bkr \in bkR$  với mọi  $r \in R$ .

Do 1)  $b = bkr \in bkR$  chỉ xảy ra khi  $b = 0$ .

$$2) \Rightarrow 3)$$

Với mọi  $r \in R$  lấy bất kì  $b \in l(1 - rk)$ . Thế thì,  $b(1 - rk) = 0$ .

Ta có  $b = brk \Rightarrow br(1 - kr) = b(r - rkr) = b(1 - rk)r = 0$ .

Do 2) ta có  $br = 0$  và do đó  $b = brk = 0$ .

Điều này chứng tỏ  $l(1 - rk) = 0, \forall r \in R$ .

$$3) \Rightarrow 4)$$

Nếu  $b(k - krk) = 0$  thì  $bk(1 - rk) = 0$ .

Do 3) ta có  $bk = 0 \Rightarrow b \in l(k)$ .

$$4) \Rightarrow kR \triangleleft^{las} R$$

Giả sử  $X$  là Idêan phải sao cho  $kR + X = R$ .

Ta có  $1 = kr + x, r \in R, x \in X$ . Nếu  $b \in l(X)$  thì  $bx = 0$ .

Điều này kéo theo  $b = bkr \Rightarrow b(k - krk) = b(1 - kr)k = b x k = 0$ .

Do 4), ta có  $b \in l(k), bk = 0 \Rightarrow b = 0$ . Như vậy  $l(X) = 0$ .

## 2.2. Vành với điều kiện linh hóa tử trái mịn

**Bổ đề 3.** Với mọi  $r, k \in R$ , ta có các mệnh đề sau

- 1)  $l(k) \oplus l(1 - kr) = l(k - krk)$ .
- 2)  $l(1 - kr) \cong l(1 - rk)$ .

*Chứng minh*

$$1) \text{ Với mọi } b \in l(k) \Rightarrow bk = 0 \Rightarrow bk - bkrk = 0 \\ \Rightarrow b(k - krk) = 0 \Rightarrow b \in l(k - krk)$$

Còn nếu  $b \in l(1 - kr) \Rightarrow b(1 - kr) = 0$ , do đó

$$b - bkr = 0 \Rightarrow bk - bkrk = 0 \Rightarrow b(k - krk) = 0 \Rightarrow b \in l(k - krk).$$

Vì thế, nếu  $b \in l(k) \oplus l(1 - kr)$  thì  $b \in l(k - krk)$ .

Ngược lại, với bất kì  $b \in l(k - krk)$ , nếu  $bk = 0$  thì  $b \in l(k)$ .

Nếu  $bk \neq 0$ , thì từ  $b(k - krk) = 0$  ta có  $b(1 - kr)k = 0$ .

Điều này xảy ra với mọi  $k \in R$  nên  $b(1 - kr) = 0$ .

Có nghĩa là  $b \in l(1 - kr)$ . Như vậy, nếu  $b \in l(k - krk)$  thì  $b \in l(k) \oplus l(1 - kr)$ .

$$2) \text{ Ta có } l(k - krk) = l(k(1 - rk)) = l(k) \oplus l(1 - rk) = l(1 - kr)k = \\ = l(1 - kr) \oplus l(k) \cong l(k) \oplus l(1 - kr).$$

Suy ra điều phải chứng minh.

**Định nghĩa 4.** Phần tử  $r \in R$  được gọi là *mịn phải (trái)* nếu Idêan  $rR$  (trung ứng  $Rr$ ) là linh hóa tử trái mịn. Phần tử vừa mịn phải vừa mịn trái thì gọi là *phần tử mịn*.

**Nhận xét 6.** Phần tử khả nghịch thì không mịn.

*Chứng minh*

Thật vậy, giả sử  $r \in R$  là khả nghịch phải. Tồn tại  $r' \in R$  sao cho  $rr' = 1$ . Do đó  $1 - rr' = 0$ , nên  $l(1 - rr') = R$ . Từ đó suy ra,  $rR$  không là linh hóa tử trái mịn.

**Nhận xét 7.** Nếu  $R$  là miền nguyên thì phần tử  $r \in R$  là mịn phải nếu và chỉ nếu  $rR \neq R$  (còn có nghĩa là  $r$  không khả nghịch phải).

*Chứng minh*

Thật vậy, nếu phần tử  $r \in R$  là mịn phải thì  $rR \triangleleft^{las} R$ .

Điều này chứng tỏ với mọi  $r' \in R$  ta có  $l(1 - rr') = 0$ .

Suy ra,  $1 - rr' \neq 0 \Rightarrow rr' \neq 1 \Rightarrow rR \neq R$ .

Ngược lại, nếu  $rR \neq R$  thì  $rr' \neq 1$  với mọi  $r' \in R$ .

Điều này chứng tỏ  $1 - rr' \neq 0$  với mọi  $r' \in R$ .

Do  $R$  là miền nguyên nên  $l(1 - rr') = 0$  với mọi  $r' \in R$ .

Như vậy  $rR \triangleleft^{las} R$  hay phần tử  $r \in R$  là mịn phải.

**Mệnh đề 6.** Cho  $R$  là vành Artin,  $k$  là phần tử mịn phải sao cho:

Với mọi  $0 \neq b \in R$  mà  $bR \supset bkR$  thì  $k$  là tựa lũy linh.

*Chứng minh*

Thật vậy, giả sử  $k$  không tựa lũy linh ta sẽ chứng minh đây chuyển

$kR \supset k^2R \supset k^3R \supset \dots$  là giảm thực sự.

Do  $k$  không tựa lũy linh nên không tồn tại  $n \in \mathbb{N}$  sao cho  $k^n = k^{n+i}, \forall i \geq 1$ .

Do  $bR \supset bkR$  với mọi  $0 \neq b \in R$  nên  $R \supset kR$ .

Giả sử bất đẳng thức  $k^iR \supset k^{i+1}R$  đúng với  $i = n$ , nghĩa là  $k^nR \supset k^{n+1}R$ .

Ta chứng tỏ  $k^{n+1}R \supset k^{n+2}R$ . Do  $k$  không tựa lũy linh nên  $k^{n+1} \neq 0$ .

Bất đẳng thức  $bR \supset bkR$  đúng với  $k^{n+1} \neq 0$ .

Điều này dẫn đến  $k^{n+1}R \supset k^{n+2}R$ .

Bằng qui nạp chúng ta nhận được dãy chuyền giảm thực sự  $kR \supset k^2R \supset k^3R \supset \dots$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết  $R$  là vành Artin.

Giả thiết phản chứng sai chứng tỏ  $k$  là tựa lũy linh.

Từ Mệnh đề 6, chúng ta thấy rằng nếu  $R$  là vành có phần tử  $k$  mìn phải không tựa lũy linh thỏa mãn bất đẳng thức  $bR \supset bkR$  với mọi  $0 \neq b \in R$  thì  $R$  không phải là vành Artin. Đồng nghĩa với  $R$  không có Idêan tối tiểu.

Gọi tập hợp các phần tử mìn trái của vành  $R$  là  $K_l = \{r \in R | rR \triangleleft^{las} R\}$ .

Ta có mối quan hệ với Idêan trái kì dị  $Z_l = Z_l(R) = \{z \in R | l(z) \triangleleft^* R\}$  và căn Jacobson  $J$  như sau:  $Z_l \subseteq K_l$  và  $J \subseteq l$

Một điểm lưu ý là  $K_l$  không đóng đối với phép toán cộng. Ví dụ trong  $R = \mathbb{Z}$ ,  $-2$  và  $3$  thuộc  $K_r$  trong khi  $1 \notin K_l$ .

Ngoài ra  $K_l$  bị chứa trong tập hợp các phần tử không khả nghịch (Nhận xét 4). Như là hệ quả của Mệnh đề 5, ta có:

**Hệ quả 2.** Nếu  $r \in K_l$  thì  $rR \subseteq K_l$  và  $Rr \subseteq K_l$ .

Từ hệ quả này ta nói  $l$  là nửa Idêan của  $R$ . Trong trường hợp tổng quát thì nửa Idêan không khép kín với phép toán cộng và đó là lí do nó được gọi là nửa Idêan. Trường hợp nửa Idêan khép kín với phép toán cộng thì nó trở thành Idêan.

**Hệ quả 3.**  $0$  là phần tử lũy đẳng duy nhất của  $K_l$ .

*Chứng minh*

Thật vậy, nếu  $k$  là phần tử lũy đẳng của  $K_l$  và  $k \neq 0$  thì theo Mệnh đề 6,

dãy chuyền  $kR \supset k^2R \supset k^3R \supset \dots$  là giảm thực sự.

Điều này mâu thuẫn với  $k = k^2$ ,

chứng tỏ  $0$  là phần tử lũy đẳng duy nhất của  $K_l$

**Mệnh đề 7.** Các điều kiện sau đây là tương đương đối với Idêan  $I$  của vành  $R$ :

1,  $I \triangleleft^{las} R$

2,  $I \subseteq K_l$

3,  $l(1 - k) = 0, \forall k \in I$

*Chứng minh:* (1  $\Rightarrow$  2) Khi  $I \triangleleft^{las} R$  thì mọi phần tử của  $I$  là phần tử của  $K_l$ .

(2  $\Rightarrow$  3),  $\forall k \in I \Rightarrow k \in K_r$ . Do đó  $l(1 - kr) = 0, \forall r \in R$ . Ta có  $l(1 - k) = 0$ .

(3  $\Rightarrow$  1).  $\forall k \in I$  thì  $l(1 - k) = 0$

Giả sử  $I + X = R$ , ta có  $1 = k + x$  với  $k \in I, x \in X$ . Ta có  $l(x) = l(1 - k) = 0$ .

Điều này chứng tỏ  $l(X) = 0$  hay  $I \triangleleft^{las} R$ .

**Mệnh đề 8.** Trong vành  $\pi$ -chính qui mạnh  $R$  thì  $K_l = J$  là lũy linh.

*Chứng minh:* Từ Mệnh đề 7, dễ dàng suy ra  $J \subseteq K_l$ .

Giả sử  $r \in K_l$  không lũy linh.  $r^n \neq 0$  với mọi  $n$ . Áp dụng Mệnh đề 6, chúng ta có  $r^nR \supset r^{n+1}R$ . Bởi vậy  $rR \supset r^2R \supset \dots$ . Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Do vậy, mọi phần tử của  $K_l$  là lũy linh. Từ Hệ quả 2, ta có  $rr'$  là lũy linh với mọi  $r' \in R$  và do đó  $K_l = J$ .

Ta định nghĩa *AS Idêan trái* của vành  $R$  là tổng các linh hóa tử trái mịn của vành  $R_R$  và kí hiệu là  $A_l = A_l(R) = \sum\{K|K \triangleleft^{las} R\}$ . Tương tự *AS Idêan phải* của vành  $R$  là tổng các linh hóa tử phải mịn của vành  $R$  và kí hiệu là  $A_r = A_r(R) = \sum\{K|K \triangleleft^{ras} R\}$ .

Rõ ràng rằng với mọi vành  $R$  thì  $K_l \subseteq A_l$ , nhưng điều ngược lại thì không đúng, chẳng hạn  $R = \mathbb{Z}$ .

**Định lý 1.** Trong vành  $R$  chúng ta có:

- 1,  $A_l$  là một Idêan hai phía chứa mọi linh hóa tử mịn trái.
- 2,  $A_l = \{k_1 + k_2 + \dots + k_n | k_i \in K_l, \forall i, n \geq 1\}$ .
- 3,  $A_l = K_l R = R K_l$ .
- 4,  $J \subseteq A_l$  và  $Z_l \subseteq A_l$ .

*Chứng minh*

2, Đặt  $X = \{k_1 + k_2 + \dots + k_n | k_i \in K_l, \forall i, n \geq 1\}$ . Ta chứng minh  $A_l = X$ .

Lấy  $x \in A_l$ ,  $x \in K_1 + K_2 + \dots + K_n$  với  $K_i \triangleleft^{las} R, i = 1, 2, \dots, n$ .

Ta có  $x = k_1 + k_2 + \dots + k_n, k_i \in K_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$ .

Hơn nữa  $k_i R \subseteq K_i$ . Bởi vậy,  $k_i R \triangleleft^{las} R$ .

Điều này chứng tỏ  $k_i \in K_l$ , suy ra rằng  $A_l \subseteq X$ .

Ngược lại, lấy  $k \in K_l$  thì ta có  $kR \triangleleft^{las} R$ .

Bởi thế  $k \in A_l$ . Điều đó suy ra  $X \subseteq A_l$ .

1, Rõ ràng  $A_l$  là một Idêan phải. Ngoài ra do 2, đã được chứng minh ở trên và hệ quả 2, nó là một Idêan trái.

3, Suy ra từ 1,2 và bất đẳng thức  $K_l \subseteq A_l$ .

4, Điều này suy ra từ Bổ đề 3.

Để liệt tả rõ hơn quan hệ giữa  $A_r$  và  $A_l$  chúng ta có nhận xét sau đây:

**Nhận xét 8.**

1, Có thể xảy ra các quan hệ  $A_r \not\subseteq A_l$  hay  $A_l \not\subseteq A_r$ .

2,  $A_l(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  và do đó Idêan phải  $A_l$  có thể không mịn.

3, Tổng của hai Idêan mịn có thể không mịn.

**Mệnh đề 9.** Cho  $R$  là vành Ikeda-Nakayama.

Nếu  $rl(T) \triangleleft^{las} R$  thì  $l(T) \triangleleft^* R$  với mọi  $T \triangleleft R$ .

*Chứng minh*

Gọi  $K \triangleleft R$  sao cho  $\cap l(T) = 0$ . Do  $R$  là vành Ikeda-Nakayama nên ta có  $R = r(K \cap l(T)) = r(K) + rl(T)$ .

Từ giả thiết  $rl(T) \triangleleft^{las} R$  ta có  $l(r(K)) = 0$ .

Điều này chứng tỏ  $K = 0$ , nghĩa là  $l(T) \triangleleft^* R$ .

**Bài toán: Tính  $A_r$  và  $A_l$  trong vành  $R$**

Dĩ nhiên ứng với mỗi đặc trưng của  $R$  cho ta các hướng tính toán  $A_r$  và  $A_l$  khác nhau. Do đó cấu trúc của  $A_r$  và  $A_l$  sẽ giúp ta nhìn nhận, phân loại vành theo cách riêng của nó.

Ở đây, chúng ta tính toán trong một số trường hợp cụ thể, độc giả từ đó có một cách nhìn của riêng mình.

*Trường hợp 1:* Vành  $R = \mathbb{Z}$ .

Trước hết,  $\mathbb{Z}$  là vành giao hoán nên ta có nhận xét  $A_r(\mathbb{Z}) = A_l(\mathbb{Z})$ .

Mọi Idêan  $I$  của vành các số nguyên  $\mathbb{Z}$  đều có dạng  $m\mathbb{Z}$ . Giả sử  $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$  và  $l(n\mathbb{Z}) = 0$ .

Tức là  $l(n\mathbb{Z}) = \{z \in \mathbb{Z} | zn\mathbb{Z} = 0\}$ . Dễ dàng thấy rằng  $\{z \in \mathbb{Z} | zn\mathbb{Z} = 0\}$  xảy ra khi và chỉ khi  $z = 0$ . Nghĩa là  $l(n\mathbb{Z}) = 0$ , đồng nghĩa với  $m\mathbb{Z} \triangleleft^{las} \mathbb{Z}$  với mọi  $m$ . Suy ra  $A_l(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ .

*Trường hợp 2:* Vành  $R = \mathbb{Z}_2$ .

$\mathbb{Z}_2$  chỉ có hai Idêan là  $\bar{0} = 2n\mathbb{Z}$  và  $\bar{1} = (2n + 1)\mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Dễ dàng thấy rằng  $l(\bar{0}) = \mathbb{Z}_2$ . Ngoài ra  $l(\bar{1}) = \bar{0}$ .

Chỉ có các phân tích thành tổng các Idêan con  $\mathbb{Z}_2 = \bar{0} + \bar{1} = \bar{1} + \bar{0}$ , do đó suy ra  $A_r(\mathbb{Z}_2) = 0$ . Do tính chất giao hoán của  $\mathbb{Z}_2$  ta có  $A_r(\mathbb{Z}_2) = 0 = A_l(\mathbb{Z}_2)$ .

*Trường hợp 3.* Vành  $R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}$

$$\text{Ta có } \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Có các dạng Idêan  $\begin{bmatrix} I_{\mathbb{Z}} & I_{\mathbb{Z}_2} \\ 0 & I_{\mathbb{Z}_2} \end{bmatrix}$  trong đó  $I_{\mathbb{Z}}$  là Idêan của  $\mathbb{Z}$ ,  $I_{\mathbb{Z}_2}$  là Idêan của  $\mathbb{Z}_2$

Xét các đẳng thức ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} z & \bar{i} \\ 0 & \bar{j} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \times \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{và } \begin{bmatrix} z & \bar{i} \\ 0 & \bar{j} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z \times \mathbb{Z}_2 + \bar{i} \times \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \bar{j} \times \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}.$$

Nên ta có  $l\left(\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}\right) = 0$  và  $l\left(\begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}$ . Nên  $\begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \subset A_l(R)$ .

$$\begin{bmatrix} z & \bar{i} \\ 0 & \bar{j} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \times \mathbb{Z} & \bar{i} \times \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \bar{j} \times \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} z & \bar{i} \\ 0 & \bar{j} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z \times \mathbb{Z}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nên ta cũng có  $l\left(\begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}\right) = 0$  và  $l\left(\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}$ .

Nên  $\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \subset A_l(R)$ .

Từ đó suy ra rằng  $A_l(R) = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

### 3. KẾT LUẬN

Các kết quả nghiên cứu linh hóa tử trái mịn của một vành trong bài báo này bước đầu cho ta một vài phân loại vành. Một số tính chất liên quan đến giải xoắn  $Tor(R)$  của  $R$  với tư cách là một môđun trên chính nó sẽ là hướng nghiên cứu tiếp theo mà các tác giả chưa có điều kiện để đề cập tới trong bài báo này. Một số chứng minh trong bài báo là làm rõ hơn các nội dung đã được các tác giả W.K. Nicholson, Yiqiang Zhou trình bày cô đọng trong [3] nhằm giúp thêm tư liệu cho người đọc.



## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] W.K. Nicholson, Yiqiang Zhou (2011), *Annihilator-small Right Ideals*, Algebra Colloquium 18(Special 1):785-800.
- [2] D. Anderson and V.P. Camillo (1998), *Armendariz rings and Gaussian rings*, Comm. in Algebra 26, 2265-2272.
- [3] V. P. Camillo, W.K. Nicholson and M.F. Yousif (2000), *Ikeda-Nakayama rings*, J. Algebra 226, 1001-1010.
- [4] K.R. Goodearl (1976), *Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules*, CRC Press.
- [5] N.V Sanh, N.A Vu, S Asawasamrit, K.F.U Ahmed and L.P Thao (2010), *Primeness in module category*, Asian-European J. Mathematics, 3 (1), 145-154.
- [6] Thuat V.D, Hai D.H, N.D.H Nghiem (2016), Sarapee C, *On the endomorphism rings of Max CS and Min CS Modules*, AIP Conference Proceedings 1775, 030066; doi:10.1063/1.4965186.

## RING WITH LEFT SMALL ANNIHILATOR CONDITIONS

Hoang Dinh Hai, Vu Thi Nhi, Nguyen Thi Huong

## ABSTRACT

*The study of Ring characteristics through Jacobson radical suggests new studies on the small annihilator ideals and its applications. Left small annihilator ideals of a ring has been W.K. Nicholson, Yiqiang Zhou presented in [3]. A right ideal  $A$  of the ring  $R$  is called a small ideal if for every right ideal  $B$  of  $R$  that  $A + B = R$  then  $B = R$ ;  $A$  is called a left small annihilator ideals if  $l(B) = 0$  ( $l(B)$  is a left annihilator of  $B$ ). The purpose of this paper is to study the left small annihilator ideals that W.K. Nicholson and Yiqiang Zhou have contributed. Since then we would like to develop a number of ring characteristics, such as the Ikeda-Nakayama ring, the Artin ring, and the strong  $\pi$ -regular ring with small annihilator conditions.*

**Keywords:** *Small right Ideal, annihilator, jacobson radical.*

\* Ngày nộp bài: 28/8/2020; Ngày gửi phản biện: 23/9/2020; Ngày duyệt đăng: 28/10/2020

# NGHIÊN CỨU THÀNH PHẦN THỰC VẬT KHU VỰC NÚI MIÈNG, XÃ PHÚC THỊNH, HUYỆN NGỌC LẶC, TỈNH THANH HÓA

Đỗ Thị Hải<sup>1</sup>

TÓM TẮT

*Kết quả nghiên cứu thực vật khu vực núi Miêng, xã Phúc Thịnh, huyện Ngọc Lặc, tỉnh Thanh Hóa đã xác định được: 117 loài thuộc 98 chi của 47 họ; trong đó ngành Ngọc lan chiếm ưu thế với 87,23% tổng số họ, 92,86% tổng số chi và 91,45% tổng số loài, các ngành khác chiếm tỷ lệ không đáng kể. Hệ thực vật nơi đây có các đại diện của 17/20 yếu tố địa lý của thực vật Việt Nam, trong đó yếu tố châu Á nhiệt đới chiếm tỷ lệ cao nhất (21,37%). Phổ dạng sống cho hệ thực vật khu vực núi đá vôi Miêng là: SB = 53,45% Ph + 12,93% Ch + 15,52% He + 9,48% Cr + 8,62% Th. Thực vật ở khu vực núi Miêng có giá trị sử dụng làm thuốc chiếm ưu thế với 67 loài (chiếm 41,36%). Sự phân bố các loài không đồng đều ở các độ cao, chân núi có số loài cao nhất và thấp nhất là đỉnh núi.*

**Từ khóa:** Đa dạng, dạng sống, thực vật, yếu tố địa lý, núi Miêng.

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Phúc Thịnh là một xã trung du miền núi nằm phía Tây nam của huyện Ngọc Lặc, Thanh Hóa. Xã có chiều dài 8 km, chiều rộng 4,5 km, phía Tây nam xã có Sông Âm bắt nguồn từ huyện Lang Chánh, hợp lưu với sông Chu ở phía Đông nam tại làng Miêng. Xã Phúc Thịnh có vị trí chiến lược về quân sự, xây dựng khu vực phòng thủ bảo vệ hướng nam của huyện Ngọc Lặc. Phúc Thịnh là xã có địa hình phức tạp, cao thấp không đồng đều, độ cao trung bình là 320 m, được bao bọc bởi các dãy núi giống như lòng chảo. Dân cư phân bố rải rác, tập trung theo các trục đường giao thông và ven các sườn đồi. Phúc Thịnh là một xã thuần nông, thu nhập chính của người dân chủ yếu từ nông nghiệp, đời sống của người dân vẫn gặp rất nhiều khó khăn. Cơ cấu cây trồng tại xã chưa mang lại giá trị kinh tế cao, chưa thật sự giúp ổn định cuộc sống của người dân nơi đây. Vì vậy, việc đánh giá tiềm năng của nguồn tài nguyên thực vật nơi đây là cần thiết, góp phần chuyển dịch cơ cấu cây trồng, khai thác và sử dụng bền vững nguồn tài nguyên đa dạng sinh học. Xuất phát từ những lý do trên, chúng tôi đã tiến hành nghiên cứu thành phần thực vật khu vực núi Miêng thuộc xã Phúc Thịnh, huyện Ngọc Lặc, tỉnh Thanh Hóa nhằm bảo tồn và phát triển bền vững tài nguyên thực vật phục vụ phát triển kinh tế xã hội.

## 2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Thu thập mẫu vật: theo phương pháp của Nguyễn Nghĩa Thìn [1]. Mẫu được thu 6 đợt từ tháng 6 năm 2019 đến tháng 4 năm 2020. Thu mẫu theo tuyến chân núi,

<sup>1</sup> Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức

lung núi và đỉnh núi. Mẫu vật được bảo quản tại Phòng thí nghiệm Sinh học, Trường Đại học Hồng Đức.

Phân tích, giám định nhanh theo phương pháp hình thái so sánh và dựa vào các tài liệu: “Cẩm nang nghiên cứu đa dạng thực vật” của Nguyễn Nghĩa Thìn (1997) [1]; “Cây cỏ Việt Nam” của Phạm Hoàng Hộ (1999-2000) [2]; “Cẩm nang tra cứu và nhận biết các họ thực vật hạt kín Việt Nam” của Nguyễn Tiến Bản (1997) [3]. Danh lục các loài được xếp theo Brummitt (1992) [4].

Đánh giá về giá trị sử dụng bằng phương pháp phỏng vấn nhanh có sự tham gia (PRA) và dựa vào các tài liệu của Võ Văn Chi (2012) [5], Đỗ Tất Lợi (2003) [6].

Phân tích tính đa dạng về các yếu tố địa lý: Dựa vào hệ thống phân chia các yếu tố địa lý của Nguyễn Nghĩa Thìn (1997) [1], Lê Trần Chấn và cộng sự (1999) [7].

Phân tích tính đa dạng về dạng sống: Áp dụng hệ thống của Raunkiaer (1934) [8].

### 3. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU VÀ THẢO LUẬN

#### 3.1. Đa dạng về bậc phân loại

Kết quả nghiên cứu đã xác định được 117 loài thuộc 98 chi, 47 họ, 3 ngành, kết quả thể hiện ở bảng 1.

**Bảng 1. Phân bố các Taxon trong các ngành thực vật ở khu vực núi Miềng**

Taxon	Họ		Chi		Loài		
	Số lượng	Tỷ lệ (%)	Số lượng	Tỷ lệ (%)	Số lượng	Tỷ lệ (%)	
1. Lycopodiophyta	1	2,13	1	1,02	2	1,71	
2. Polypodiophyta	5	10,64	6	6,12	8	6,84	
3. Magnoliophyta	Liliopsida	32	68,08	70	71,43	82	70,09
	Magnoliopsida	9	19,15	21	21,43	25	21,36
Tổng	47	100	98	100	117	100	

Kết quả bảng 1 cho thấy, ngành Lycopodiophyta chiếm số lượng ít nhất với 2,13% tổng số họ; 1,02% tổng số chi, 1,71% tổng số loài; ngành Polypodiophyta có số lượng khá hơn với số họ chiếm 10,64%; số chi là 6,12% và số loài là 6,84%. Còn lại, hầu hết thực vật ở đây thuộc ngành Magnoliophyta chiếm 87,23% tổng số họ; 92,86% tổng số chi; 91,45% tổng số loài. Điều này hoàn toàn hợp lý, vì ngành Magnoliophyta là ngành chiếm ưu thế so với các ngành còn lại, phù hợp với các công trình trước đó của Nguyễn Nghĩa Thìn [1], Lê Trần Chấn và cộng sự [7], Nguyễn Tiến Bản [3] về đa dạng thực vật.

#### 3.2. Đa dạng về các yếu tố địa lý

Đánh giá về yếu tố địa lý theo Nguyễn Nghĩa Thìn (1997) [1] và Lê Trần Chấn và cộng sự (1999) [7]. Số lượng của các loài thực vật ở khu vực núi Miềng trong các yếu tố địa lý được thể hiện qua bảng 2.

**Bảng 2. Số lượng loài ở khu vực núi Miềng trong các yếu tố địa lý**

TT	Yếu tố địa lý	Ký hiệu	Số loài	Tỷ lệ (%)
1	Yếu tố đặc hữu Trung Bộ	14	4	3,42
2	Yếu tố đặc hữu Việt Nam	16	10	8,55
3	Yếu tố Đông Dương	17	18	15,38
4	Yếu tố Nam Trung Quốc	18	11	9,40
5	Yếu tố Hải Nam - Đài Loan - Philippiné	19	2	1,71
6	Yếu tố Ấn Độ	21	20	17,09
7	Yếu tố Malaysia	22	2	1,71
8	Yếu tố Indonesia - Malaixia	23	1	0,85
9	Yếu tố châu Á nhiệt đới	25	25	21,37
10	Yếu tố ôn đới	26	3	2,56
11	Yếu tố ôn đới và liên đới	27	3	2,56
12	Yếu tố Đông Á	28	2	1,71
13	Yếu tố châu Á	29	3	2,56
14	Yếu tố phân bố rộng (Yếu tố toàn cầu)	31	4	3,42
15	Yếu tố nhập nội và di cư hiện đại	32	9	7,69
Tổng			117	100

Qua bảng 2 cho thấy, trong số 20 yếu tố địa lý được thống kê ở Việt Nam, thì hệ thực vật ở khu vực núi Miềng có các loài đại diện cho 15/20 yếu tố địa lý. Trong đó, tỷ lệ các loài thuộc yếu tố châu Á nhiệt đới chiếm tỷ lệ lớn nhất (21,37%), tiếp theo là loài thuộc yếu tố Ấn Độ (17,09%) và yếu tố Đông Dương (15,38%), yếu tố nam Trung Quốc và yếu tố nhập nội và di cư hiện đại cũng khá cao, chiếm tỷ lệ tương ứng là 9,4% và 7,69%. Yếu tố đặc hữu Việt Nam chiếm 4,27% còn yếu tố đặc hữu Trung Bộ và yếu tố toàn cầu chiếm 3,42%.

Chiếm tỷ lệ thấp nhất là các yếu tố Đông Á, Malaysia, Hải Nam - Đài Loan - Philippine với 1,71%. Không có loài thuộc yếu tố ôn đới Bắc, yếu tố Himalaya và yếu tố Indonesia - Malaysia - Úc đại dương.

### 3.3. Đa dạng về dạng sống

Dựa vào thang phân chia dạng sống theo Raunkiaer (1934) [8], dạng sống của các loài thực vật ở núi Miềng được thống kê qua bảng 3.

**Bảng 3. Các dạng sống trong khu hệ thực vật ở khu vực núi Miềng**

Dạng sống	Ký hiệu	Số lượng	Tỷ lệ %
Chồi trên mặt đất	Ph	63	53,85
Chồi sát mặt đất	Ch	15	12,82
Chồi nửa ẩn	He	18	15,38
Chồi ẩn	Cr	11	9,40
Cây một năm	Th	10	8,55
Tổng		117	100

Qua bảng trên cho thấy nhóm cây có chồi trên (Ph) chiếm ưu thế với 63 loài, chiếm 53,85%, tiếp đến là cây chồi nửa ẩn (He) chiếm 15,38%, chiếm tỷ lệ thấp nhất là cây một năm (8,55%). Phổ dạng sống của hệ thực vật có mạch ở khu vực núi Miêng thể hiện như sau: SB = 53,85% Ph + 12,82% Ch + 15,38% He + 9,40% Cr + 8,55% Th.

### 3.4. Sự phân bố các loài theo địa hình

Trong quá trình nghiên cứu, đã ghi nhận các loài sống ở 3 dạng địa hình chính là chân núi, lưng núi và đỉnh núi (bảng 4).

**Bảng 4. Phân bố của các taxon theo địa hình**

TT	Địa hình	Họ		Chi		Loài	
		Số lượng	Tỷ lệ %	Số lượng	Tỷ lệ %	Số lượng	Tỷ lệ %
1	Chân núi	43	55,13	85	60,28	100	63,29
2	Lưng núi	26	33,33	43	30,49	44	27,85
3	Đỉnh núi	9	11,54	13	9,23	14	8,86
Tổng		78	100	141	100	158	100

Qua bảng cho thấy: Các họ, chi và loài phân bố ở từng dạng địa hình có sự khác nhau thể hiện:

Ở chân núi: Số họ, chi, loài phong phú hơn cả, có tới 43 họ chiếm 63,29%; 85 chi chiếm 60,28%; 100 loài chiếm 63,29%.

Ở lưng núi: gồm 26 họ chiếm 33,33%; 43 chi chiếm 30,49%; 44 loài chiếm 27,85%.

Ở đỉnh núi: gồm 9 họ chiếm 11,54%; 13 chi chiếm 9,23%; 14 loài chiếm tỷ lệ 8,86%.

Có sự phân bố khác nhau giữa các sinh cảnh mà đặc biệt là sinh cảnh chân núi so với đỉnh núi là do ở chân núi có điều kiện sinh thái (độ ẩm, ánh sáng, lớp chất dinh dưỡng...) thuận lợi hơn, phù hợp với nhiều loài, ngược lại ở đỉnh núi nhất là núi đá vôi với cường độ ánh sáng lớn, gió mạnh, độ ẩm thấp..., chất mùn lại nghèo nên chỉ có một số loài thích nghi được như: Huyết giác (*Dracaena cambodiana* Pierre ex Gagn.), Lòng mức (*Wrightia rubriflora* Pit.) và một số cây họ Ráy (*Alocasia odora* (Roxb.) C. Koch, *Raphidophora laichauensis* Gagn.).

### 3.5. Đa dạng về giá trị sử dụng

Để đánh giá nguồn tài nguyên thực vật trong khu vực núi Miêng dựa vào phương pháp phỏng vấn có sự tham gia (PRA) và các tài liệu: Từ điển cây thuốc Việt Nam [5], Cây cỏ Việt Nam [2], Những cây thuốc và vị vị thuốc Việt Nam [6], kết quả cụ thể được trình bày ở bảng 5.

Kết quả dẫn liệu ở bảng 5 cho thấy: Chỉ với 117 loài thực vật nhưng đã cho 162 lượt công dụng. Thực vật có giá trị sử dụng làm thuốc là cao nhất (chiếm 41,36%), điều này cũng rất phù hợp với tập quán của người Việt Nam ở miền núi. Có những họ hầu hết các loài được sử dụng làm thuốc như họ Asteraceae, Euphorbiaceae, Menispermaceae... Một số loài cây có giá trị cao trong việc sử dụng làm thuốc như: *Stephania rotunda* Lour., *Raphidophora decursiva* Schott. Tiếp sau là loài có giá trị sử dụng làm cây cảnh, bóng

mát, làm thức ăn cho con người (14,81%), có giá trị lấy gỗ chiếm 6,79%, chiếm tỷ lệ thấp nhất là cây chứa chất độc (3,70%) và cây làm thức ăn cho gia súc (3,09%). Những loài cây cho nhiều công dụng như: *Bambusa membranaceus* (Munro) Stapl. & Xia (Tn, Cn, T); *Citrus grandis* (L). Osb (Tn, T, D); *Phyllanthus reticulata* Poir (T, Cn: Nhuộm)...

Trong số các loài ở đây thì loài *Melientha suavis* Pierre (Rau Sắng) là một đặc trưng của vùng núi đá vôi, là một loại thực phẩm rất gần gũi trong mỗi gia đình nơi đây, hiện nay còn là đặc sản của vùng.

Như vậy, mặc dù còn nhiều loài chưa xác định rõ được giá trị sử dụng nhưng qua bảng trên có thể thấy rằng, thiên nhiên đã ban tặng cho con người nơi đây một nguồn tài nguyên khá dồi dào cho cuộc sống.

**Bảng 5. Các giá trị sử dụng của thực vật ở khu vực núi Miềng**

TT	Giá trị sử dụng	Ký hiệu	Số loài*	Tỷ lệ (%)
1	Làm thuốc	T	67	41,36
2	Lấy gỗ	G	11	6,79
3	Ăn được (củ, quả, hạt, lá,...)	Tn	24	14,81
4	Làm cây cảnh, bóng mát	C	24	14,81
5	Thức ăn cho gia súc	Tg	5	3,09
6	Lấy dầu	D	7	4,32
7	Dùng cho ngành công nghiệp (đan lát, lấy sợi, mỹ nghệ, lấy nhựa...)	Cn	7	4,32
8	Độc	Đ	6	3,70
9	Công dụng khác (củi, phân xanh,...)	K	11	6,80
Tổng			162	100

\*1 loài có thể cho 1 hoặc nhiều giá trị sử dụng khác nhau

#### 4. KẾT LUẬN

Hệ thực vật vùng núi Miềng bước đầu đã xác định được 117 loài thuộc 98 chi, 47 họ thực vật có mạch thuộc 03 ngành thực vật bậc cao có mạch là Thông đất (Lycopodiophyta), Dương xỉ (Polypodiophyta) và Ngọc lan (Magnoliophyta). Trong đó, ngành Ngọc lan chiếm ưu thế với 87,23% tổng số họ, 92,86% tổng số chi và 91,45% tổng số loài.

Hệ thực vật nơi đây có các đại diện của 17/20 yếu tố địa lý của thực vật Việt Nam, trong đó yếu tố có tỷ lệ loài nhiều nhất là Châu Á nhiệt đới (21,37%), thấp nhất là các yếu tố Đông Á, Malaysia, Hải Nam - Đài Loan - Philippine với 1,71%.

Phổ dạng sống cho hệ thực vật khu vực núi đá vôi Miềng là: SB = 53,45% Ph +12,93% Ch + 15,52% He + 9,48% Cr + 8,62% Th.

Sự phân bố các loài không đồng đều ở các độ cao từ chân núi đến đỉnh núi.

Hệ thực vật khu vực núi Miềng có tới 106 loài cây cho giá trị sử dụng chiếm 90,60% tổng số loài, trong đó số loài cây dùng làm thuốc chiếm tỷ lệ cao nhất với 41,36%, cây làm cây cảnh; cho bóng mát, làm thức ăn cho con người chiếm 14,81%; cây cho gỗ chiếm 6,79%; cây cho độc chiếm 3,70% và thấp nhất là cây làm thức ăn gia súc chiếm 3,09%.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Nghĩa Thìn (1997), *Cẩm nang nghiên cứu đa dạng sinh vật*. Nxb. Nông nghiệp, Hà Nội.
- [2] Phạm Hoàng Hộ (1999-2000), *Cây cỏ Việt Nam* (3 tập), Nxb. Trẻ, Thành phố Hồ Chí Minh.
- [3] Nguyễn Tiến Bân (1997), *Cẩm nang tra cứu và nhận biết các họ thực vật hạt kín Việt Nam*, Nxb. Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
- [4] Brummitt R. K. (1992), *Vascular plant families and genera*, Royal Botanic Gardens, Kew.
- [5] Võ Văn Chi (1997), *Từ điển cây thuốc Việt Nam*, Nxb. Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
- [6] Đỗ Tất Lợi (2003), *Cây thuốc và vị thuốc Việt Nam*, Nxb. Y học, Hà Nội.
- [7] Lê Trần Chấn và cộng sự (1999), *Một số đặc điểm cơ bản của hệ thực vật Việt Nam*, Nxb. Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
- [8] Raunkiear C. (1934), *Plant life forms*, Claredon, Oxford, p.104.

**STUDY OF THE FLORA COMPOSITIONS IN MIENG MOUNTAIN,  
PHUC THINH COMMUNE, NGOC LAC DISTRICT,  
THANH HOA PROVINCE**

**Do Thi Hai**

ABSTRACT

*Studies of the flora system in Mieng mountain, Phuc Thinh commune, Ngoc Lac district, Thanh Hoa province show that there are 117 species belonging to 98 genera of 47 families; in which Magnoliophyta is the most diverse, representing 87.23% of the families, 92.86% of the genera and 91.45% of the total species, other divisions account for negligible percentage. The flora system in this area represented of 17 out of 20 geographical factors of the flora in Vietnam, of which geographical element of tropical Asia account for the highest percentage (21.37%). The Spectrum of Biology (SB) of the flora in Mieng was summarized as follows: 53.45% Ph + 12.93% Ch + 15.52% He + 9.48% Cr + 8.62% Th. Medicinal plant species in the Mieng mountain dominate with 67 species (accounting for 41.36%). The distribution of plant species is not uniform at the altitudes, the highest number of species at the lowest altitude and the lowest number of species at the mountain peak.*

**Keywords:** Diversity, life-forms, plant, phytogeographical, Mieng mountain.

\* Ngày nộp bài: 28/8/2020; Ngày gửi phản biện: 28/8/2020; Ngày duyệt đăng: 28/10/2020

# NGHIÊN CỨU ĐỘ LINH ĐỘNG CỦA HẠT TẢI TRONG KÊNH DẪN GE PHA TẠP ĐIỀU BIẾN PHỤ THUỘC VÀO NHIỆT ĐỘ

Trần Thị Hải<sup>1</sup>, Nguyễn Thị Thảo<sup>2</sup>, Nguyễn Thị Dung<sup>3</sup>, Nguyễn Thị Tú<sup>4</sup>

## TÓM TẮT

*Trong bài báo này chúng tôi tính toán sự phụ thuộc của độ linh động lỗ trống vào thành phần nhiệt độ trong cấu trúc kênh dẫn Ge pha tạp điều biến ở nhiệt độ cao. Trong vùng nhiệt độ này, chúng tôi đưa ra hàm tự tương quan cho sự phân bố của hạt tải và các cơ chế tán xạ của chúng. Chúng tôi đã xem xét các cơ chế tán xạ cơ bản, đặc biệt là tán xạ gây bởi phonon. Kết quả chỉ ra rằng, tán xạ gây bởi độ nhám bề mặt và phonon âm đóng vai trò quan trọng trong việc giới hạn độ linh động của hạt tải. Chúng tôi xác định độ linh động phụ thuộc vào nhiệt độ lên tới 300°K. Lý thuyết của chúng tôi có thể mô tả khá tốt thực nghiệm về hiện tượng vận chuyển của lỗ trống trong kênh Ge pha tạp điều biến trong khoảng nhiệt độ từ 50K đến 300°K.*

**Từ khóa:** Độ linh động, tán xạ phonon âm, pha tạp điều biến, kênh dẫn Ge.

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Các cấu trúc bán dẫn dị chất chứa Ge và SiGe ngày càng nhận được nhiều sự quan tâm nghiên cứu của các nhà khoa học trong nước và quốc tế vì tầm quan trọng của chúng trong việc ứng dụng các máy móc, thiết bị [1-5]. Các nghiên cứu về kênh dẫn Ge pha tạp điều biến ở nhiệt độ thấp cho thấy tán xạ do nhám bề mặt là cơ chế tán xạ cơ bản giới hạn độ linh động của hạt tải [4,6]. Ở nhiệt độ cao hơn 150K, tán xạ phonon âm và phonon quang có đóng góp quan trọng và là một trong những cơ chế tán xạ cơ bản giới hạn độ linh động của hạt tải [2,7].

Trong những năm gần đây một vài nhóm tác giả [4,5,8,9] đã đưa ra lý thuyết nghiên cứu về độ linh động của hạt tải giam cầm trong các cấu trúc giếng lượng tử pha tạp điều biến. Các tác giả này đã tính đến độ linh động phụ thuộc vào mật độ hạt tải và độ rộng kênh dẫn nhưng chưa tính đến độ linh động phụ thuộc vào nhiệt độ. Chính vì vậy, nhóm chúng tôi lựa chọn bài toán nghiên cứu và tính toán độ linh động của hạt tải trong kênh dẫn Ge ở nhiệt độ cao. Trong nghiên cứu trước đây [8], chúng tôi đã áp dụng mô hình lý thuyết cho mẫu kênh dẫn dị chất Ge pha tạp một phía. Các kết quả tính toán được so sánh với số liệu của nhóm Irisawa [3] với độ rộng kênh dẫn  $L = 7.5\text{nm}$ ,  $L_d = 10\text{nm}$ ,  $L_s = 20\text{nm}$ , lớp Ge được nuôi cấy ở nhiệt độ 350°C. Trong bài báo này, chúng tôi tiếp tục áp dụng phương pháp biến phân để mô tả giam cầm lượng tử trong

<sup>1,2,3</sup> Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức

<sup>4</sup> Học viên cao học Khoa khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức

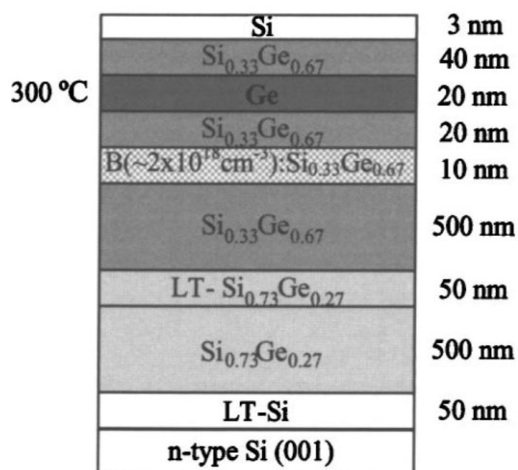


cấu trúc kênh dẫn Ge pha tạp điều biến một phía. Kết quả được so sánh với thực nghiệm của nhóm Myronov [2] với độ rộng kênh dẫn  $L = 20\text{nm}$ ,  $L_d = 10\text{nm}$ ,  $L_s = 20\text{nm}$ , lớp Ge được nuôi cấy ở nhiệt độ  $300^\circ\text{C}$ , trong đó tất cả các cơ chế tán xạ phonon âm, phonon quang, độ nhám bề mặt và tạp chất bị ion hóa đều được tính đến. Cấu trúc của bài báo như sau: trong phần II chúng tôi dẫn ra phương pháp tính toán các cơ chế tán xạ trong cấu trúc kênh dẫn Ge pha tạp điều biến một phía ở nhiệt độ cao. Từ đó rút ra độ linh động của hệ hạt tải trong cấu trúc trên. Phần III là một số kết quả và thảo luận.

## 2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

### 2.1. Mô hình nghiên cứu

Chúng tôi tiến hành nghiên cứu cấu trúc kênh dẫn Ge được nuôi cấy trên nền vật liệu Si (Hình 1). Bằng việc nuôi cấy liên tục các lớp vật liệu trên lớp nền Si, người ta sẽ tạo ra được kênh dẫn Ge, mà ở đó tập trung các hạt tải mang điện.

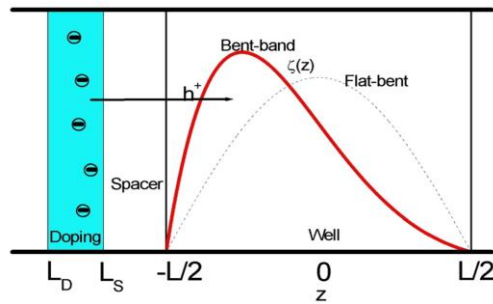


Hình 1. Cấu trúc mẫu [2]

Với mô hình như trên, ta có được một kênh dẫn Ge nằm giữa hai lớp  $\text{Si}_{0.33}\text{Ge}_{0.67}$  và được pha tạp bởi một lớp nguyên tử B cỡ  $10\text{nm}$ . Như vậy, ta có thể xem vật liệu bán dẫn trên có cấu trúc là một kênh dẫn có dạng một giếng lượng tử pha tạp điều biến một phía với độ rộng của kênh dẫn là bề rộng của lớp Ge kích thước  $20\text{nm}$ , hai lớp rào chính là hai lớp vật liệu  $\text{Si}_{0.33}\text{Ge}_{0.67}$  và được pha tạp một phía bởi lớp nguyên tử B có bề rộng  $10\text{nm}$ .

Chúng tôi đã mô hình hóa cấu trúc trên bằng hình vẽ 2.

Khi nghiên cứu cấu trúc bán dẫn dị chất như trên, chúng ta đã xét ảnh hưởng của các nguồn giam cầm có mặt trong hệ như: Các tạp ion hoá, bản thân khí hạt tải 2 chiều, tức là thay vì chỉ xét giếng vuông góc phẳng, chúng ta phải xét đến hiệu ứng uốn cong vùng năng lượng (band bending).



**Hình 2. Mô hình giếng lượng tử pha tạp một phía**

Lý thuyết uốn cong vùng năng lượng giữ một vai trò khá quan trọng đối với sự hình thành kênh dẫn trong cấu trúc dị chất. Khi có pha tạp một phía kênh dẫn, sẽ dẫn tới hiệu ứng uốn cong vùng năng lượng làm cho sự phân bố của hạt tải trong kênh Ge có dạng bất đối xứng: tăng về phía có pha tạp ( $z < 0$ ), giảm về phía không có pha tạp ( $z > 0$ ).

Cụ thể là, dưới ảnh hưởng của hiệu ứng uốn cong vùng năng lượng, các hạt tải trong trường hợp pha tạp một phía không còn đối xứng như trong mô hình flat-band mà lệch về phía có pha tạp. Theo mô hình này thì việc điều biến bất đối xứng hàm sóng, nghĩa là độ dốc của hàm sóng thay đổi, làm tăng tán xạ do độ nhám bề mặt gây nên mà tán xạ này là tán xạ chủ đạo, vì thế độ linh động của hạt tải giảm mạnh.

Kênh dẫn có chiều cao rào thế là vô hạn, chúng tôi sử dụng hàm sóng bao ở trạng thái cơ bản có dạng như sau [8]:

$$\zeta(z) = \begin{cases} B\sqrt{\frac{\pi}{L}} \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) e^{-\frac{cz}{L}} & \text{khi } |z| \leq \frac{L}{2} \\ 0 & \text{khi } |z| > \frac{L}{2}, \end{cases} \quad (2.1)$$

Ở đây  $L$  là độ rộng của kênh dẫn,  $B$  và  $c$  là những tham số biến phân xác định.  $B$  và  $c$  được xác định dựa vào điều kiện chuẩn hóa hàm sóng.

## 2.2. Xác định độ linh động của hệ hạt tải

Trong lý thuyết vận chuyển tuyến tính, độ linh động của hạt tải được cho bởi:  $\mu = \frac{e \cdot \tau}{m^*}$  với  $m^*$  là khối lượng hiệu dụng của hạt tải. Thời gian sống vận chuyển được biểu diễn qua hàm tự tương quan (AFC) đối với mỗi nhiễu loạn bằng [10]:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{(2\pi)^2 \hbar E_F} \int_0^{2k_F} dq \int_0^\pi d\varphi \frac{q^2}{(4k_F^2 - q^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\langle |U_{(q)}|^2 \rangle}{\varepsilon^2(q)}. \quad (2.2)$$

Ở đây,  $q = (q, \varphi)$  là xung lượng truyền hai chiều cho bởi các cơ chế tán xạ trong mặt phẳng  $x, y$ :  $q = |q| = 2k_F \sin(\vartheta/2)$  với  $\vartheta$  là góc tán xạ. Năng lượng Fermi được

xác định:  $E_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m^*$  với  $k_F = \sqrt{2\pi p_s}$  là số sóng Fermi,  $p_s(z)$  là nồng độ hạt tải hai chiều xác định trong [11].

Hàm điện môi  $\varepsilon(q)$  định lượng cho hiệu ứng chắn của thế tán xạ của hạt tải hai chiều. Áp dụng gần đúng trường ngẫu nhiên ta có [12,13] :

$$\varepsilon(q) = 1 + \frac{q_s}{q} F_s(q)[1 - G(q)], \text{ for } q \leq 2k_F,$$

Trong đó,  $q_s = 2m^* e^2 / \varepsilon_L \hbar^2$  là nghịch đảo chiều dài chắn hai chiều Thomas-Fermi. Hiệu chỉnh trường cục bộ do tương tác trao đổi giữa các hạt với nhau được cho bởi [14]:

$$G(q) = \frac{q}{2\sqrt{q^2 + k_F^2}}.$$

Thừa số dạng chắn  $F_s(q)$  phụ thuộc vào tương tác của hạt dọc theo phương nuôi được xác định bởi [12,13]:

$$F_s(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} dz' |\xi(z)|^2 |\xi(z')|^2 e^{-q|z-z'|}. \quad (2.3)$$

Sử dụng hàm sóng ở phương trình (2.1), chúng ta sẽ xác định được thừa số dạng chắn cho bởi phương trình (2.3). Các hạt tải trong kênh dẫn Ge chịu tác động của nhiều nguồn tán xạ khác nhau, mỗi nguồn tán xạ tương ứng với một hàm tự tương quan  $\langle |U_{(q)}|^2 \rangle$  trong không gian véc tơ sóng. Do vậy, để xác độ linh động tổng cộng ta phải xác định các cơ chế tán xạ ảnh hưởng đến quá trình vận chuyển của hạt tải trong kênh dẫn Ge. Ở nhiệt độ cao, các hạt tải có thể có các cơ chế tán xạ sau: Tạp chất bị ion hóa (RI), độ nhám bề mặt (SR), thế biến dạng khớp sai (DP), tán xạ phonon âm (AP). Thời gian sống tổng cộng được xác định bởi quy tắc Matthiessen:

$$\frac{1}{\tau_{tot}} = \frac{1}{\tau_{AC}} + \frac{1}{\tau_{PZ}} + \frac{1}{\tau_{RI}} + \frac{1}{\tau_{SR}}. \quad (2.4)$$

### 2.2.1. Tán xạ phonon âm

Tán xạ phonon là nguồn gốc quan trọng giới hạn độ linh động của hạt tải. Theo lý thuyết vận chuyển tuyến tính, thời gian hồi phục xung lượng của tán xạ phonon âm cho bởi [15]:

$$\frac{1}{\tau(E)} = \sum_k W(k, k') (1 - \cos \alpha), \quad (2.5)$$

Ở đây  $W(k, k')$  là xác suất chuyển tiếp từ trạng thái  $k$  tới trạng thái  $k'$ ,  $\theta$  là góc tán xạ. Trong khoảng nhiệt độ mà chúng ta tìm độ linh động của hạt tải thì tán xạ phonon được xem là đàn hồi. Xác suất chuyển tiếp được cho dưới dạng:

$$W(k, k') = \frac{2k_B T}{\hbar^2} L \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{|M(q)|^2}{\omega_q S^2(q_{\perp})} |I(q_z)|^2 \delta(E_k - E_{k'}). \quad (2.6)$$

*Thế biến dạng khớp sai (DP - Deformation Potential).*

Đối với các phonon âm được tạo bởi thế biến dạng khớp sai thì yếu tố ma trận tán xạ được cho bởi [16]:

$$|M(q)|^2 = \frac{D^2 \hbar \omega_q}{2C_1 V}, \quad (2.7)$$

Trong đó, D là hằng số dạng khớp sai.

Thời gian hồi phục xung lượng của tán xạ phonon âm trong thế biến dạng khớp sai (DP) được cho bởi:

$$\frac{1}{\tau_{DP}(E)} = \frac{m^* D^2 k_B T}{4\pi h^3 C_1} \int_{-\infty}^{\infty} |I(q_z)|^2 dq_z \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos \alpha}{S^2(q_{\perp})} d\alpha, \quad (2.8)$$

Trong đó,  $q_{\perp} = 2k \sin \alpha/2$ .

*Thế điện áp tích điện (PZ - Piezoelectric coupling).*

Các phân tử ma trận trong thế điện áp tích điện (PZ) có dạng [16]:

$$|M(q)|^2 = \frac{e^2 P^2 \hbar \omega_q}{2\epsilon_0 \epsilon_r q^2 V}, \quad (2.9)$$

với P là hằng số điện áp.

Khi đó, thời gian hồi phục xung lượng do cơ chế khuếch tán có thể viết dưới dạng:

$$\frac{1}{\tau_{PZ}} = \frac{P^2 k_B T}{\pi \hbar \alpha_B^*} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos \alpha}{S^2(q_{\perp})} G_2(q_{\perp}) d\alpha. \quad (2.10)$$

Số hạng cuối trong tích phân được cho bởi:

$$G_2(q_{\perp}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|I(q_z)|^2}{q_{\perp}^2 + q_z^2} dq_z. \quad (2.11)$$

S(q) là hệ số chấn tĩnh có mối liên hệ với thừa số dạng chấn  $F_s(q)$  là:

$$S(q) = 1 + \frac{2\pi e^2 F(q) \Pi(q)}{\epsilon_0 q}, \quad (2.12)$$

với  $\Pi(q)$  là hàm phân cực ở nhiệt độ hữu hạn.

$$\Pi(q, T, E_F) = \frac{1}{4k_B T} \int_0^{\infty} \frac{\Pi(q, 0, \xi)}{\cosh^2\left(\frac{E_F - \xi}{2k_B T}\right)} d\xi = \frac{m^*}{2\pi \hbar^2} \left\{ 1 + \text{Tanh} \frac{E}{2k_B T} \right\},$$

Trong đó,  $\Pi(q, 0, \xi)$  là hàm phân cực ở nhiệt độ T=0 K, có dạng:

$$\Pi(q, 0, \xi) = \frac{m^*}{\pi \hbar^2} \left\{ 1 - \theta(q - 2k_F) \left[ 1 - \left( \frac{2k_F}{q} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}.$$

2.2.2. Tán xạ do độ nhám bề mặt (SR)

Hàm tự tương quan do nhám bề mặt gây ra ảnh hưởng lên độ linh động của hạt tải được tính toán trong công trình [17] có dạng như sau:

$$U_{SR}(\mathbf{q}) = V_0 |\zeta_{\mp}|^2 \Delta_{\mathbf{q}} \tag{2.13}$$

2.2.3. Tạp chất bị ion hóa (RI).

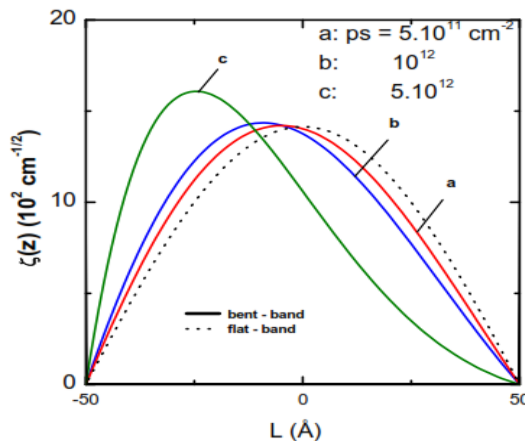
Hàm tự tương quan cho tán xạ từ sự phân bố ngẫu nhiên của tạp được xác định bởi [11,18]:

$$\langle |U_{RI}(q)|^2 \rangle = \langle |U_{RI}(q)|^2 \rangle F_C(q) \tag{2.14}$$

3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Trong phần này chúng tôi áp dụng lý thuyết tính toán để nghiên cứu hiện tượng vận chuyển của hạt tải trong kênh dẫn Ge pha tạp điều biến ở nhiệt độ cao. Đối tượng nghiên cứu là độ linh động của hạt tải trong kênh Ge được nuôi bởi lớp nền Si, Si<sub>1-x</sub>Ge<sub>x</sub>/Ge/Si<sub>1-x</sub>Ge<sub>x</sub>. Như đã chỉ ra trong công trình [19], đối với kênh dẫn Ge nuôi trên lớp nền Si, lớp pha tạp có dạng Si<sub>1-x</sub>Ge<sub>x</sub> có hàm lượng pha tạp Ge là x=0.67. Vì vậy, cấu trúc nghiên cứu của bài toán sẽ là cấu trúc dị chất Si<sub>0.33</sub>Ge<sub>0.67</sub>/Ge/Si<sub>0.33</sub>Ge<sub>0.67</sub> [20,21] trong đó, lớp rào làm bằng vật liệu SiGe được pha tạp bởi B với L<sub>d</sub> = 100 Å<sup>0</sup>, L<sub>s</sub> = 200 Å<sup>0</sup>. Vì độ cao của rào thế là lớn V<sub>0</sub> ≥ 270 meV nên ta có thể coi giếng thế là cao vô hạn.

Để tính số chúng ta cần các tham số đầu vào, ở đây chúng ta đã bỏ qua sự khác nhau của hằng số điện môi giữa lớp giếng và lớp rào, sử dụng giá trị trung bình của chúng. Đối với kênh dẫn Ge, khối lượng hiệu dụng trên phương z và mặt phẳng (x, y) là khác nhau, cụ thể m<sub>z</sub> = 0.19m<sub>e</sub>, m\* ≈ 0.1m<sub>e</sub> [22,23]. Hằng số biến dạng cứng c<sub>11</sub> = 12.85, c<sub>12</sub> = 4.83, c<sub>44</sub> = 6.80 trong một đơn vị 10<sup>10</sup> Pa, và hằng số biến dạng đàn hồi cho bởi b<sub>s</sub> = 2.55, d<sub>s</sub> = 5.50 [24].

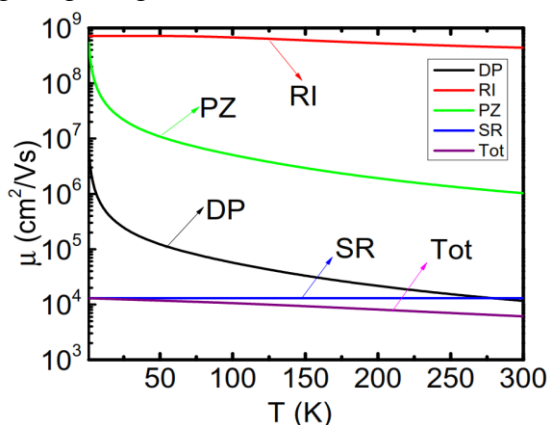


Hình 3. Cấu trúc kênh dẫn Ge pha tạp điều biến với các giá trị khác nhau của nồng độ hạt tải p<sub>s</sub>

Trên hình vẽ 3, các đường đứt nét là hàm sóng trong mô hình flat-band, các đường liền nét là hàm sóng trong mô hình kênh Ge pha tạp một phía với bề rộng kênh dẫn  $L = 150 \text{ \AA}$  và các giá trị khác nhau của nồng độ hạt tải  $p_s$  với  $p_s = 5.10^{11}, 10^{12}, 5.10^{12} \text{ cm}^{-2}$ .

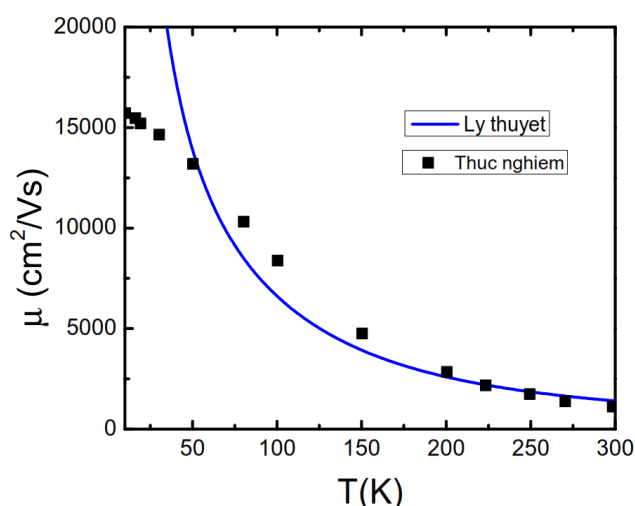
Quan sát hình vẽ ta nhận thấy: trong mô hình flat-band hàm sóng có dạng đối xứng và không phụ thuộc vào nồng độ hạt tải trong kênh dẫn. Tại nồng độ hạt tải nhỏ cỡ  $p_s = 5.10^{11} \text{ cm}^{-2}$  hàm sóng flat-band và bent-band gần như trùng nhau. Khi ta tăng nồng độ hạt tải  $p_s$ , hàm sóng trong kênh pha tạp điều biến một phía biến dạng nhưng vẫn có dạng đối xứng; tiếp tục tăng  $p_s$ , hàm sóng biến dạng mạnh mẽ hơn, các hạt tải có xu hướng dồn về phía có pha tạp nhiều hơn.

Hình 4 chúng tôi vẽ sự phụ thuộc của độ linh động gây ra bởi tất cả các cơ chế tán xạ và độ linh động tổng cộng vào nhiệt độ.



**Hình 4. Độ linh động phụ thuộc vào nhiệt độ  $T$  của tất cả các cơ chế tán xạ: Thế biến dạng khớp sai (DP), Thế điện tích áp điện (PZ), Tán xạ do tạp chất bị ion hóa (RI), tán xạ do độ nhám bề mặt (SR), và độ linh động tổng cộng  $\mu_{Tot}$**

Nhìn vào đồ thị hình 4 ta thấy, độ linh động tổng cộng  $\mu_{tot}$  càng giảm khi ta tăng nhiệt độ  $T$ . Độ linh động tổng cộng chịu ảnh hưởng nhiều nhất bởi tán xạ do độ nhám bề mặt gây ra, đây là cơ chế tán xạ chủ đạo ở nhiệt độ thấp đã được nghiên cứu nhiều ở các công trình [4,5,9]. Tuy nhiên khi nhiệt độ tăng lên, vai trò của các cơ chế tán xạ do phonon gây ra càng thể hiện vai trò quan trọng, chúng đã làm giới hạn độ linh động tổng cộng của hạt tải, dẫn tới độ linh động tổng cộng giảm dần khi nhiệt độ tăng lên. Đường cong của độ linh động tổng cộng phụ thuộc ngày càng nhiều vào độ dốc của các đường cong do tán xạ phonon âm gây ra. Ảnh hưởng của tán xạ gây bởi tạp chất bị ion hóa là ít nhất. Những kết quả này khá phù hợp với các tính toán trong [2,24]. Lý thuyết của chúng tôi đã giải thích định tính được sự phụ thuộc của độ linh động tổng cộng của hạt tải vào các cơ chế tán xạ gây bởi phonon.



Hình 5. Độ linh động  $\mu_{tot}$  phụ thuộc vào nhiệt độ  $T$ .

Trên hình 5 các chấm vuông là số liệu thực nghiệm của nhóm Myronov [2], về sự phụ thuộc của độ linh động tổng cộng vào nhiệt độ, đường liền nét là lý thuyết tính toán của nhóm chúng tôi. Trong miền nhiệt độ thấp các tác giả [4,5,8,10] đã xây dựng lý thuyết tương đối hoàn chỉnh để nghiên cứu độ linh động của hạt tải phụ thuộc vào các tham số của giếng lượng tử. Khi nhiệt độ tăng lên, làm xuất hiện tán xạ của các phonon âm và phonon quang, làm cho việc tính toán trở nên phức tạp. Trong trường hợp nhiệt độ cao tác giả đi sâu xem xét ảnh hưởng của cơ chế tán xạ do phonon gây ra và chứng minh cơ chế tán xạ do phonon là cơ chế tán xạ cơ bản trong vùng nhiệt độ này. Quan sát hình 5 cho thấy lý thuyết tính toán cho kết quả khá phù hợp với thực nghiệm trong vùng nhiệt độ lớn hơn từ  $50^{\circ}K$  đến  $300^{\circ}K$ . Kết quả trên cũng hoàn toàn phù hợp khi sử dụng lý thuyết tính toán để áp dụng cho kênh dẫn Ge pha tạp một phía trong thực nghiệm của nhóm Irisawa [3] đã được chúng tôi dẫn ra trong công trình [8].

#### 4. KẾT LUẬN

Bài báo đã đưa ra biểu thức tính độ linh động của hạt tải trong kênh Ge pha tạp điều biến một phía. Đã tính được độ linh động của hệ hạt tải phụ thuộc vào nhiệt độ  $T$  gây ra bởi tất cả các cơ chế tán xạ. Giải thích định tính được cơ chế tán xạ cơ bản của hệ hạt tải khi nhiệt độ tăng lên. Trong đó, tán xạ gây bởi độ nhám bề mặt và phonon âm là cơ chế tán xạ cơ bản, tán xạ gây bởi tạp chất bị ion hóa ảnh hưởng ít nhất. Đã so sánh tính toán lý thuyết với thực nghiệm, kết quả cho thấy đường tính toán lý thuyết phản ánh tương đối tốt kết quả đo đạc thực nghiệm, đặc biệt trong vùng nhiệt độ từ  $50K$  đến  $300K$ , từ đó chứng tỏ tầm quan trọng của tán xạ phonon âm trong việc làm giảm độ linh động của hạt tải khi nhiệt độ tăng lên.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Ahmad F.N.C. Razak, F. Salehuddin\*, Ameer F. Roslan, A.S.M. Zain, K.E. Kaharudin (2019), Enhanced electron mobility in strained Si/SiGe 19nm n-channel MOSFET device, *Proceedings of Mechanical Engineering Research Day 2019*, pp. 157-158.
- [2] Myronov M, Irisawa T, Koh S, Mironov O A, Whall T E, Parker E H C and Shiraki Y (2005), Temperature dependence of transport properties of high mobility holes in Ge quantum wells, *J. Appl. Phys*, 97 083701.
- [3] T. Irisawa, H. Miura, T. Ueno, and Y. Shiraki (2001), Channel Width Dependence of Mobility in Ge Channel Modulation-Doped Structures Jpn, *J. Appl. Phys.*, Part 1 40, 2694.
- [4] Doan Nhat Quang, Nguyen Huyen Tung, Do Thi Hien, and Tran Thi Hai (2008), Key scattering mechanisms for holes in strained SiGe/Ge/SiGe square quantum wells, *Journal of Applied physics*, 104, 113711.
- [5] Doan Nhat Quang, Nguyen Huyen Tung, Nguyen Trung Hong, and Tran Thi Hai (2011), Two-side doping effects on the mobility of carriers in square quantum wells, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 80 (4), 044714.
- [6] Schaffer F. (1997), High-mobility Si and Ge structures, *Sci. Technol.*, 12, 1515.
- [7] M. Myronov, K. Sawano, and Y. Shiraki (2006), electronic transport and semiconductors, *Appl. Phys. Lett.*, 88, 252115
- [8] Trần Thị Hải, Nguyễn Thị Dung, Nguyễn Thị Thảo (2020), Temperature-dependent transport properties of two-dimensional hole gas in Ge channel modulation-doped square quantum wells, *Journal of Physics: Conf. Series*, 1506.
- [9] Tran Thi Hai, Ho Khac Hieu (2017), Mobility of carrier in the single-side and double-side doped square quantum wells, *The European Physical Journal B* 90 (6).
- [10] Gold. A. (1987), Electronic transport properties of two dimensional electron gas in a silicon quantum well structure at low temperature, *Phys. Rev. B*. 35, 723.
- [11] Lima F M S, Qu Fanyao (2001), Nunes O A C and Fonseca A L A, Electron Mobility in One (Two)-Side Modulation-Doped GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As Asymmetric Quantum Wells *phys. stat.sol (b)* 1, 43-61
- [12] Ando T. (1982), Self-Consistent Results for a GaAs=Al As Heterojunction. I. Subband Structure and Light-Scattering Spectra, *J. Phys. Soc. Jpn.* Vol. 51, 3893;
- [13] Ando T. (1982), Self-Consistent Results for a GaAs=Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As Heterojunction. II. Low Temperature Mobility, *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 51, 3900-3907
- [14] Jonson M. (1976), Electron correlations in inversion layers, *J. Phys. C* 9, 3055.



- [15] D. L. Rode (1982) *Semiconductors and Semimetals*, edited by R. K. Willardson and A. C. Beer (Academic, New York, 1975), 10, Chap 1.
- [16] Okuyama Y and Tukuda N (1989), Electron-phonon interactions in modulation-doped  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{GaAs}$  heterojunctions, *Phys. Rev. B*, 40, 9744.
- [17] D. N. Quang, V.N. Tuoc, N. H. Tung, and T. D. Huan (2003), Strain fluctuations in a real [001]-oriented zinc-blende-structure surface quantum well, *Phys. Rev. B* 68, 153306.
- [18] Ando T (1982), Self-Consistent Results for a  $\text{GaAs}=\text{Al}_x\text{GaAs}$  Heterojunction. II. Low Temperature Mobility, *J. Phys. Soc. Jpn.* 1, 3900
- [19] Kahan. A., Chi. M. and Friedman. L. (1994), Infrared transitions in strained-layer  $\text{Ge}_x\text{Si}_{1-x}$ , *J. Appl. Phys.* 75, 0812.
- [20] Madhavi S, Venkataraman V, Sturm J C and Xie Y H (2000) Low- and high-field transport properties of modulation-doped  $\text{Si}/\text{SiGe}$  and  $\text{Ge}/\text{SiGe}$  heterostructures: Effect of phonon confinement in germanium quantum wells, *Phys. Rev. B* 61, 16807.
- [21] Rossner. B., von Kanel. H., Chrastina. D., Isella. G. and Batlogg. B.(2006), 2-D hole gas with two-subband occupation in a strained Ge channel: Scattering mechanisms, *Thin Solid Films* 508, pp. 351354.
- [22] Fischetti M V and Laux S E (1996), Band structure, deformation potentials, and carrier mobility in strained Si, Ge, and SiGe alloys, *J. Appl. Phys.* 80 2234
- [23] Fischetti. M. V., Gamiz. F., and Hansch. W. (2002), On the enhanced electron mobility in strained-silicon inversion layers, *J. Appl. Phys.* Vol. 92, 7320.
- [24] V. Umansky, R. De-Picciotto, and M. Heiblum (1997), Extremely high-mobility two dimensional electron gas: Evaluation of scattering mechanisms, *Appl. Phys. Lett*, 71, 683.

**STUDY THE MOBILITIES OF CARRIERS  
DEPENDENT ON TEMPERATURE IN GE CHANNEL  
MODULATION-DOPED STRUCTURES**

Tran Thi Hai, Nguyen Thi Thao, Nguyen Thi Dung, Nguyen Thi Tu

ABSTRACT

*In this paper we calculate the temperature dependent part of the hall mobility in Ge channel modulation-doped structures with very high room-temperature. At high temperatures, we were able to derive the autocorrelation functions for the distribution*

*of carriers and their scattering mechanisms. We incorporate all possible main scattering mechanisms, especially acoustic-phonon scattering. It is shown that surface-roughness and acoustic-phonon scattering play a dominant role in limiting the mobility. We analyzed the behavior of the mobility for temperature values up to 300K. Our theory is able to well reproduce the experimental data about the transport of holes in Ge channel modulation-doped structures from 50°K to 300°K.*

**Keywords:** *Mobility, acoustic-phonon scattering, modulation-doping, Ge channel.*

\* Ngày nộp bài: 25/5/2020; Ngày gửi phản biện: 2/6/2020; Ngày duyệt đăng: 28/10/2020

\* Bài báo này là kết quả nghiên cứu từ đề tài cấp Bộ mã số B2018-HDT-09 của Bộ giáo dục và Đào tạo.

# PHÁT HIỆN GIẢ MẠO KHUÔN MẶT SỬ DỤNG CÔNG NGHỆ TRÍ TUỆ NHÂN TẠO

Lê Văn Hào<sup>1</sup>, Trịnh Thị Anh Loan<sup>1</sup>, Lê Việt Nam<sup>1</sup>, Nguyễn Đức Toàn<sup>2</sup>

## TÓM TẮT

Phát hiện giả mạo khuôn mặt là một bước quan trọng trong các hệ thống nhận dạng khuôn mặt. Gần đây, sự phát triển của các mạng nơ-ron tích chập (Convolution Neural Networks - CNNs) đang cho thấy kết quả vượt trội so với các phương pháp truyền thống sử dụng các thuật toán xử lý ảnh khác. Bên cạnh đó, xu hướng di động hóa đang đòi hỏi các phần mềm cần đáp ứng được khả năng thực thi trên các thiết bị có năng lực hạn chế như điện thoại, thiết bị nhúng. Trong bài báo này, chúng tôi đề xuất mạng nơ-ron tích chập hduNet được phát triển từ mạng MobilenetV2 của Google để phát hiện giả mạo khuôn mặt nhằm hướng tới mục tiêu chạy trên các thiết bị phần cứng yếu không sử dụng bộ xử lý đồ họa (GPU) mà vẫn đáp ứng độ chính xác. Ngoài ra, chúng tôi cũng bổ sung thêm 5000 dữ liệu ảnh mang đặc trưng của người châu Á để tăng cường hiệu quả và tránh việc mất cân bằng trong bộ dữ liệu chuẩn LCC\_FASD [1] vốn chỉ thiên về ảnh giả mạo với 16885 ảnh giả mạo và chỉ 1942 ảnh thật. Cuối cùng, chúng tôi thực hiện đánh giá hiệu quả của mạng đề xuất trên tập dữ liệu mới thu thập và ứng dụng kết quả trong một ứng dụng thực tiễn cụ thể.

**Từ khóa:** Giả mạo khuôn mặt, phương pháp học chuyển giao, phương pháp tinh chỉnh, mạng nơ-ron tích chập.

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Các cuộc tấn công giả mạo đã trở thành mối đe dọa bảo mật nghiêm trọng cho các hệ thống xác thực, do chúng có thể được sử dụng để truy cập trái phép vào hệ thống bằng cách mạo danh người dùng được ủy quyền. Cụ thể, kẻ xấu có thể dễ dàng thực hiện các cuộc tấn công giả mạo đối với các hệ thống xác thực khuôn mặt bằng cách in ảnh của người được ủy quyền lên giấy hoặc bằng cách chụp ảnh và hiển thị trên thiết bị di động [2,3]. Nhằm đối phó với những thách thức này, một số kỹ thuật chống giả mạo đã được phát triển để phát hiện những hành vi giả mạo. Các hệ thống chống giả mạo dựa trên mạng nơ-ron tích chập gần đây đã thể hiện sự hiệu quả vượt trội của chúng so với các phương pháp truyền thống, vì thế chúng là giải pháp hứa hẹn để thay thế các kỹ thuật dựa trên đặc trưng và thuật toán học máy trước đây vốn dựa trên các đặc trưng cục bộ dễ nhạy cảm với nhiễu và kết quả kém chính xác.

<sup>1</sup> Khoa Công nghệ Thông tin và Truyền thông, Trường Đại học Hồng Đức

<sup>2</sup> Sở Công Thương Thanh Hóa

Tuy nhiên, có một xu hướng mới là nhận dạng khuôn mặt đang dần chuyển sang các thiết bị di động hoặc thiết bị nhúng. Điều này yêu cầu thuật toán chống giả mạo khuôn mặt cần được cải tiến để chạy với chi phí tính toán và lưu trữ ít hơn. Từ quan điểm này, việc thiết kế các thuật toán chống giả mạo dựa trên mạng nơ-ron tích chập trở nên thách thức hơn trong môi trường di động hoặc nhúng. Do đó, phát triển một thuật toán học sâu đủ tốt để có thể chạy được trên các thiết bị cấu hình thấp nhưng vẫn đáp ứng được độ chính xác của thuật toán vẫn đang cần nhiều đầu tư nghiên cứu.

Đóng góp chính của chúng tôi trong bài báo này là đề xuất một mạng nơ-ron học sâu hduNet phát triển từ mô hình MobileNetV2 được phát triển bởi Google. Bên cạnh đó, sau khi nghiên cứu những bộ dữ liệu về giả mạo khuôn mặt, chúng tôi nhận thấy điểm khó khăn và giới hạn về mức độ phong phú, đa dạng của các bộ dữ liệu hiện nay đều chưa đáp ứng. Bởi vì thế, chúng tôi đóng góp thêm vào 5000 dữ liệu ảnh trong bộ dữ liệu chuẩn LCC\_FASD nhằm giảm tình trạng mất cân bằng và nâng cao hiệu quả của thuật toán để phù hợp với đặc trưng của người châu Á, cụ thể là người Việt Nam.

Bài báo được tổ chức như sau: Phần 2 trình bày các công việc liên quan đến những nghiên cứu về phát hiện giả mạo khuôn mặt. Phần 3 mô tả chi tiết về phương pháp đề xuất của chúng tôi. Phần 4 sẽ trình bày các quá trình thực nghiệm và kết quả của chúng tôi, bao gồm cả việc tiền xử lý dữ liệu, và hậu xử lý trong ngữ cảnh ứng dụng thực tiễn. Cuối cùng, các kết luận và những định hướng phát triển trong tương lai được trình bày ở phần 5.

## 2. CÁC KỸ THUẬT PHÁT HIỆN GIẢ MẠO KHUÔN MẶT

Nhìn chung, các nghiên cứu về phát hiện giả mạo có thể được chia thành 2 phương pháp chính gồm: phương pháp truyền thống và phương pháp sử dụng mạng nơ-ron tích chập CNNs.

Phương pháp truyền thống: Bài toán phát hiện giả mạo được quy về bài toán phân loại nhị phân bằng phương pháp sử dụng vector hỗ trợ (Support Vector Machine - SVM). Cụ thể, quá trình được thực hiện theo cách sau:

*Bước 1.* Trích chọn các đặc trưng bằng các bộ lọc khác nhau. Các đặc trưng được áp dụng chủ yếu bao gồm: Local Binary Patterns (LBP) [4,5,6], Scale Invariant Feature Transform (SIFT) [7], Speeded-Up Robust Features (SURF) [8], Histogram of Oriented Gradients (HOG) [9,10], Difference of Gaussian (DoG) [10].

*Bước 2.* Phân loại là giả hay thật bằng cách sử dụng thuật toán SVM hoặc Random Forest.

Tuy nhiên, các tác giả [11] chỉ ra rằng việc phát hiện đặc trưng bị ảnh hưởng rất nhiều bởi môi trường, ví dụ như điều kiện ánh sáng. Hơn nữa, phát hiện đặc trưng cho thấy các hạn chế của đặc trưng và các điểm đặc trưng không cung cấp nhiều thông tin như các phương thức CNN có thể mang lại với các tập dữ liệu khổng lồ.

Phương pháp CNNs: Về cơ bản, phương pháp sử dụng CNNs có thể được nhóm thành 3 nhóm.

*Nhóm 1.* Sử dụng duy nhất một khung hình màu RGB kết hợp với bộ phân loại. Hầu hết các phương pháp tiếp cận bằng cách sử dụng lớp cuối cùng trong mạng CNNs là tầng kết nối đầy đủ (Fully Connected Layer) để phân biệt khuôn mặt thật và giả. Bên cạnh đó, các tác giả [12] đã đề xuất một cách là không lấy đặc trưng ở tầng cuối cùng mà họ kết hợp sử dụng SVM và tầng gần cuối để phân biệt khuôn mặt thật và giả. Các tác giả [13] tăng cường thêm bằng việc áp dụng mạng học sâu phát hiện chớp mắt để nâng cao kết quả. Và các nghiên cứu thấy rằng nhóm phương pháp sử dụng ảnh RGB kết hợp với mạng học sâu CNN vẫn có thể được cải thiện hiệu quả.

*Nhóm 2.* Sử dụng mạng CNN với nhiều khung ảnh RGB kết hợp với phương pháp đo áp lực tĩnh mạch Remote Photoplethysmography (rPPG) [14] để đưa ra quyết định. Phương pháp này cho kết quả tốt do những khuôn mặt giả sẽ không có các tín hiệu PPG này. Nhưng nhóm phương pháp này yêu cầu cần có máy ảnh chuyên dụng để có thể đo được PPG, đồng nghĩa với việc cần phát sinh thêm khoản chi phí vì cần mua thêm thiết bị ngoài.

*Nhóm 3.* Kết hợp nhiều loại ảnh RGB, ảnh hồng ngoại, ảnh 3D trên cùng một đối tượng để truyền vào mạng CNN nhằm trích chọn đặc trưng và đưa ra quyết định [15]. Nhóm phương pháp này mặc dù cho thấy độ chính xác cao nhất so với các nhóm khác nhưng yêu cầu nguồn dữ liệu và thiết bị phần cứng để đáp ứng. Bên cạnh đó, sử dụng nhiều loại ảnh cũng yêu cầu số lượng tính toán lớn, điều này làm cho thuật toán khó có thể đạt được tốc độ mong muốn.

Qua các phương pháp trên, việc áp dụng kiến trúc mạng trọng lượng nhẹ chưa có nhiều sự quan tâm. Trong phần tiếp theo, chúng tôi đề xuất mạng nơ-ron tích chập CNNs có tên hduNet dựa trên tinh chỉnh và tối ưu kiến trúc mạng CNNs nổi tiếng của Google là MobileNetV2 [16] để đáp ứng cả độ chính xác và thời gian xử lý.

### 3. PHƯƠNG PHÁP ĐỀ XUẤT

Trong phần này, chúng tôi sẽ giới thiệu chi tiết về mạng hduNet. Cách tiếp cận của chúng tôi là tinh chỉnh và tối ưu mạng nơ-ron nhân chập dựa trên một mô hình mạng đã được huấn luyện của Google là MobilenetV2. Phương pháp này thường được biết đến với tên gọi là học chuyển giao (transfer learning). Đây là phương pháp hiệu quả để cải thiện tốc độ và hiệu suất từ mô hình mạng được huấn luyện thực hiện một nhiệm vụ ban đầu chuyển sang thực hiện một nhiệm vụ thứ hai. Phương pháp này cũng giúp tránh được tình trạng học quá nhớ (overfitting) khi không có số lượng lớn dữ liệu huấn luyện từ đầu, và vì thế cũng đồng nghĩa với việc tiết kiệm được tài nguyên máy tính để phục vụ huấn luyện mô hình mạng nơ-ron.

### 3.1. Kiến trúc mạng đề xuất

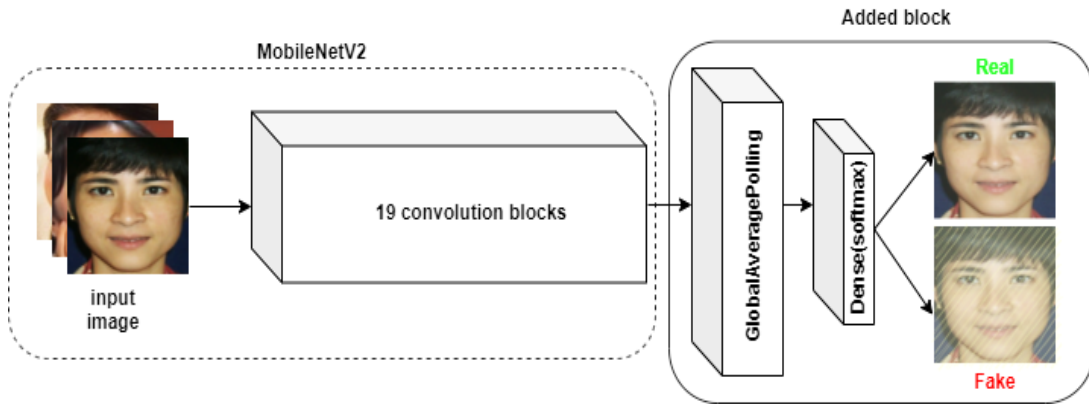
Đối với các mạng nơ-ron tích chập, thông thường có 2 hướng chính để thực hiện học chuyển giao: cách đơn giản là tách lấy bộ trích chọn đặc trưng (features extractor) hoặc kỹ thuật nâng cao mà cần đòi hỏi quá trình thực nghiệm đó là tinh chỉnh (fine-tunes) mô hình. Trong bài báo này, chúng tôi thực hiện theo hướng thứ 2 nhằm mục đích đạt được một mô hình mạng nơ-ron nhân chập tối ưu.

**Bảng 1. So sánh mô hình mạng nổi tiếng đánh giá trên tập dữ liệu ImageNet**

Mạng	Kích thước (MB)	Độ chính xác (%)	Số lượng tham số
Xception	88	79.0	22.910.480
VGG16	528	71.3	138.357.544
VGG19	549	71.3	143.667.240
ResNet50	99	74.9	25.636.712
InceptionV3	92	77.9	23.851.784
MobileNetV2	14	71.3	3.538.984

Mạng học sâu được chúng tôi đề xuất là hduNet được phát triển từ mạng MobileNetV2 [16], một trong những mạng học sâu tiên tiến được Google đề xuất năm 2018. Chúng tôi lựa chọn mạng MobilenetV2 nhằm kế thừa lại độ chính xác (đã được huấn luyện và kiểm thử trên bộ dữ liệu imagenet chứa 1,2 triệu ảnh [17]) và giải quyết được khó khăn (chi phí phần cứng, thời gian huấn luyện) mà hiện nay các thuật toán về mạng nơ-ron nhân tạo đang gặp phải. Ngoài ra, mạng MobileNetV2 có độ chính xác không thua kém các mô hình mạng phổ biến khác như VGG16, VGG19 trong khi lượng tham số chỉ gần 4 triệu, khoảng xấp xỉ 1/39 số lượng tham số của VGG16. Bảng 1 cho thấy thống kê so sánh độ chính xác, số lượng tham số mạng của một số kiến trúc mạng nổi tiếng khác.

Hình 1 mô tả kiến trúc tổng quan về hduNet. Khôi nét đứt là phần kiến trúc của mạng MobileNetV2. Kiến trúc mạng MobileNetV2 nhận đầu vào là ảnh 2D với kích thước 224 x 224 pixel. Lớp nhân chập đầu tiên với 32 bộ lọc (filters), theo sau là 19 khối (gồm nhiều tầng nhân chập ghép cùng nhau). Hàm kích hoạt (activation function) được sử dụng là hàm rectifier linear unit (ReLU), tất cả kích thước của mặt nạ lọc là 3 x 3. Tầng kết nối đầy đủ (full connected layers) của MobilenetV2 được chúng tôi loại bỏ, thay vào đó chúng tôi bổ sung phần được bao bởi khối nét liền gồm. Tầng giảm chiều tham số, trong đó chúng tôi lựa chọn hàm giảm chiều là GlobalAveragePooling, theo sau là tầng kết nối và sử dụng hàm Softmax để phân loại ảnh thật hay ảnh giả mạo. Việc làm này nhằm điều chỉnh mục tiêu của kiến trúc mạng ban đầu để thực hiện mục tiêu của bài toán phát hiện giả mạo khuôn mặt. Trong phần kế tiếp, chúng tôi sẽ trình bày chi tiết việc huấn luyện mạng hduNet.



Hình 1. Kiến trúc tổng quan của mạng hduNet

### 3.2. Cơ sở dữ liệu

Ba cơ sở dữ liệu được sử dụng gồm LCC\_FASD [1], NUAA [18] và hduDB là cơ sở dữ liệu đóng góp của chúng tôi.



(a) Minh họa hình ảnh trong tập dữ liệu LCC\_FASD

(b) Minh họa hình ảnh trong tập dữ liệu NUAA

Hình 2. Một phần của 2 tập dữ liệu LCC\_FASD và NUAA

Cơ sở dữ liệu Large Crowdcollcted Facial Anti-Spoofing Dataset (LCC\_FASD) chứa 3 tập con gồm training, development và evaluation. Tổng cộng gồm 243 đối tượng (người châu Úc) với 1942 ảnh thật và 16885 ảnh giả mạo. Hình ảnh được thu thập từ nhiều nguồn như Youtube, Amazon, Toloka,... với hình thức giả mạo trên 83 loại thiết bị (máy ảnh số, điện thoại,...) khác nhau. Hình 2 (a) mô tả một phần của tập dữ liệu LCC\_FASD.

Cơ sở dữ liệu NUAA Photo Imposter Database (NUAA) chứa 15 đối tượng (người Trung Quốc), gồm 5105 ảnh thật và 7509 ảnh giả mạo tại nhiều vị trí (văn phòng, ngoài trời, ...) và điều kiện ánh sáng khác nhau. Cơ sở dữ liệu chia làm 2 tập training và testing. Hình 2 (b) minh họa một phần ảnh thật và ảnh được giả mạo của bộ dữ liệu NUAA.

Sau khi phân tích 2 bộ cơ sở dữ liệu chuẩn, được sử dụng trong nhiều nghiên cứu về phát hiện giả mạo khuôn mặt [8,9,10,18], chúng tôi nhận thấy rằng. Cơ sở dữ liệu LCC\_FASD tập trung phần lớn vào thu thập ảnh giả mạo với tỉ lệ ảnh thật/ảnh giả mạo chênh lệch nhau rất lớn xấp xỉ 1/9 điều này có xu hướng dẫn đến kết quả quá trình huấn luyện mạng nơ-ron bị kém chính xác (underfitting). Trong khi đó, cơ sở dữ liệu NUAA với số lượng đối tượng không nhiều, chỉ 15 người khác nhau. Ngoài ra dạng tấn công của cơ sở dữ liệu NUAA chỉ là phương pháp chụp ảnh và in lại trên giấy A4 (2D print-attack) mà không có đa dạng hóa hình thức tấn công bằng cách quay chụp lại khuôn mặt từ thiết bị số như điện thoại, máy tính bảng,... (video replay attacks). Chính vì thế, với kỳ vọng có một mô hình mạng tốt, có tính tổng quát cao, phù hợp với đặc trưng của người châu Á trong cả quá trình huấn luyện và quá trình kiểm thử thực tế. Chúng tôi xây dựng cơ sở dữ liệu mới, hduNet, tổng hợp dựa trên 2 cơ sở dữ liệu trên và đóng góp thêm nhằm mục tiêu phù hợp với dữ liệu người châu Á, chi tiết được mô tả trong bảng 2.

**Bảng 2. Thống kê số lượng ảnh trong tập dữ liệu hduDB**

Phần	Ảnh giả mạo	Ảnh thật
Training	8000	4800
Valuation	2000	1200
Evaluation	4436	330
Tổng	14436	6330

## 4. THỰC NGHIỆM VÀ KẾT QUẢ

### 4.1. Môi trường thực nghiệm

Thuật toán được cài đặt bằng ngôn ngữ Python trên thư viện hỗ trợ phát triển thuật toán học sâu Keras<sup>3</sup>. Ngoài ra quá trình huấn luyện thực hiện trên máy tính với hệ điều hành Ubuntu 18.4-LTS được trang bị Intel(R) Xeon(R) W-2133 CPU @ 3.60GHz (16GB RAM), NVIDIA GeForce GTX GPU (11GB).

### 4.2. Tiền xử lý dữ liệu

Do sử dụng 3 nguồn dữ liệu khác nhau, để thực hiện huấn luyện mô hình mạng nơ-ron nhân chập chúng tôi cài đặt một số bước tiền xử lý dữ liệu gồm:

Cơ sở dữ liệu LCC\_FASD và NUAA: Thực hiện co, giãn ảnh về kích thước chung là 128 x 128. Điều này đồng nghĩa với việc kích thước ảnh đầu vào trong mạng hduNet là 128 x128, không phải là 224 x 224 của mạng MobileNetV2. Điều này, cũng giúp giảm được chi phí tính toán trong mạng nơ-ron.

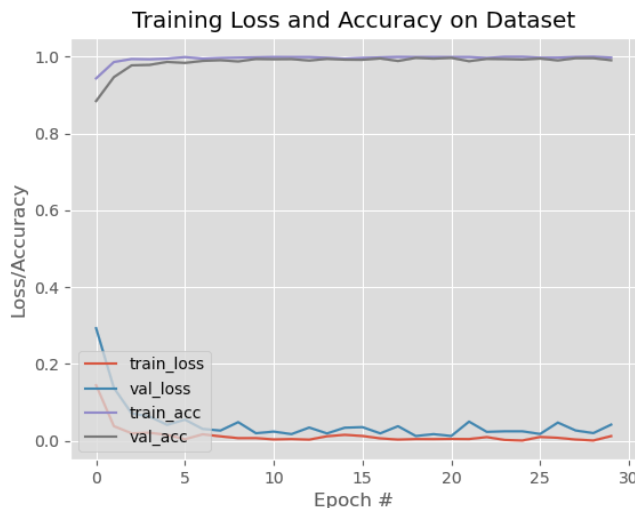
<sup>3</sup> Thư viện lập trình mạng học sâu (deep learning): <https://keras.io/>



Cơ sở dữ liệu hduNet: Vì dữ liệu do chúng tôi thực hiện đang ở mức thô gồm các video quay chụp từ camera an ninh, thiết bị di động,... nên chúng tôi thực hiện quá trình xử lý theo các bước như sau: Đầu tiên, video đầu vào được phân đoạn thành các khung hình tuần tự. Bước tiếp theo, chúng tôi thực hiện thuật toán phát hiện khuôn mặt trong khung hình. Thứ ba, với những khung hình có chứa khuôn mặt chúng tôi xác định kích thước của chúng và cắt vùng ảnh chứa khuôn mặt để lưu trữ. Cuối cùng, với mỗi ảnh mới chỉ chứa khuôn mặt được điều chỉnh về kích thước chuẩn 128 x 128.

### 4.3. Huấn luyện và đánh giá mô hình

Chúng tôi huấn luyện mạng hduNet với những tham số mạng gồm: learning rate là 0.0001, kích thước batch size là 32, thuật toán tối ưu Adam [19] và số lượng Epochs là 28. Hình 3 mô tả quá trình huấn luyện mạng hduNet.



**Hình 3. Biểu đồ huấn luyện mạng hduNet với số lượng Epochs là 28**

Qua hình 3 cho chúng ta thấy mô hình mạng nơ-ron hduNet học khá tốt, điều này được thể hiện qua 2 quá trình huấn luyện (training) và kiểm thử (validation). Biểu đồ hàm mục tiêu (loss) và độ chính xác (accuracy) của huấn luyện và kiểm thử đều bám sát nhau và đạt kết quả ấn tượng khi kết thúc huấn luyện với giá trị hàm mục tiêu giảm còn 0,02 và độ chính xác đạt 0.98 còn quá trình kiểm thử giá trị hàm mục tiêu và độ chính xác tương ứng đạt 0,08 và 0,97.

Để đánh giá chất lượng mạng nơ-ron và độ tổng quát dữ liệu của mô hình hduNet chúng tôi thực hiện chạy mô hình mạng trên một tập dữ liệu đánh giá (evaluation data) gồm 4436 ảnh giả mạo và 330 ảnh thật, không nằm trong dữ liệu dùng huấn luyện và kiểm thử. Độ đo mà chúng tôi sử dụng là 3 độ đo phổ biến được sử dụng đánh giá các hệ thống sinh trắc học gồm: Độ chính xác (Accuracy) công thức (3), Tỷ lệ phân loại ảnh giả mạo nhầm thành ảnh thật (False Acceptance Rate - FAR) công thức (1), Tỷ lệ phân loại ảnh thật bị nhầm thành giả mạo (False Rejection Rate - FRR) công thức (2). Bảng 3 diễn giải cách tính FAR, FRR và Accuracy.

**Bảng 3. Ma trận nhầm lẫn (Confusion matrix)**

Lớp		Phân lớp bởi hệ thống	
		Thật	Giả mạo
Phân lớp đúng (nhãn)	Thật	TP	FN
	Giả mạo	FP	TN

Trong đó:

TP: Số lượng các mẫu thuộc lớp thật được phân loại đúng là ảnh thật.

FP: Số lượng các mẫu thuộc lớp giả mạo được phân loại nhầm thành ảnh thật.

FN: Số lượng các mẫu thuộc lớp thật được phân loại thành giả mạo.

TN: Số lượng các mẫu thuộc lớp giả mạo được phân loại đúng là giả mạo.

N: Tổng số lượng các mẫu được đánh giá ( $N = 4436 + 330 = 4766$ ).

$$FAR = \frac{FP}{N} \quad (1)$$

$$FRR = \frac{FN}{N} \quad (2)$$

$$Accuracy = \frac{TP + TN}{N} \quad (3)$$

Kết quả tương ứng chúng tôi thu được là  $FAR = 0.124$ ,  $FRR = 0.008$  và  $Accuracy = 0.867$ . Kết quả của chúng tôi được đem so sánh với kết quả độ chính xác của nhóm tác giả [1] cùng sử dụng các mạng nơ-ron nhân chập CNNs khác.

Bảng 4 cho chúng ta thấy mặc dù kết quả độ chính xác của chúng tôi thấp hơn gần 10% so với kiến trúc mạng tốt nhất SeNet-154, nhưng theo bảng 1 chúng tôi đã chỉ ra rằng mục tiêu của kiến trúc mạng này cần đạt được là kích thước mạng cần đủ nhẹ với số lượng tham số ít. Chúng tôi đánh đổi một tỉ lệ để đạt được kiến trúc mạng nhẹ và độ chính xác vẫn ở mức cao là 86,7%. Ngoài ra, trong các kịch bản ứng dụng thực tế hệ thống nhận dạng khuôn mặt phải đối mặt với quá trình đối sánh và nhận dạng khuôn mặt, công đoạn này có thời gian tính toán tỉ lệ thuận với số lượng mẫu (người) trong cơ sở dữ liệu đối sánh. Hoặc là, trong các ứng dụng mà việc đọc dữ liệu từ luồng camera với tốc độ thông thường 24 hình/giây, tốc độ xử lý của các ứng dụng là điều cần được ưu tiên. Để đối phó với ràng buộc xử lý luồng video từ camera chúng tôi sẽ trình bày cụ thể trong phần tiếp theo.

**Bảng 4. So sánh độ chính xác của hduNet và các CNNs**

Mạng CNNs	Độ chính xác (%)
Xception	95.9
ResNext-50	94.0
SeNet-154	96.2
hduNet	86.7

#### 4.4. Ứng dụng thực tiễn

Trong các ứng dụng thực tiễn, việc phát hiện giả mạo khuôn mặt thường đi kèm cùng nhiều thuật toán khác như phát hiện khuôn mặt, đánh dấu điểm đặc trưng (mắt, mũi, miệng) trên khuôn mặt, trích chọn đặc trưng (embedding features) và phân loại. Ngoài ra, dữ liệu đầu vào thường sẽ là luồng video được đọc từ camera, webcam thay vì ảnh tĩnh như quá trình huấn luyện và kiểm thử. Chính vì thế, thuật toán trở nên thách thức hơn với việc xử lý luồng dữ liệu video (trung bình khoảng 24 khung hình/giây). Để giải quyết khó khăn này, chúng tôi cài đặt thêm một thuật toán hậu xử lý (post-processing) được trình bày dưới đây.

---

**Thuật toán:** phát hiện giả mạo khuôn mặt với dữ liệu video

---

**Đầu vào:** Ảnh thu nhận từ webcam, camera

01 : While True :

02 : Begin :

03 : count\_real = 0

04 : Dò tìm và phát hiện khuôn mặt trong ảnh

05 : Cắt vùng khuôn mặt phát hiện

06 : Phát hiện khuôn mặt giả mạo

07 : count\_real += 1

08 : If count\_real > 5 :

09 : Begin :

10 : Hiển thị và vẽ hình bao quanh khuôn mặt với nhãn real

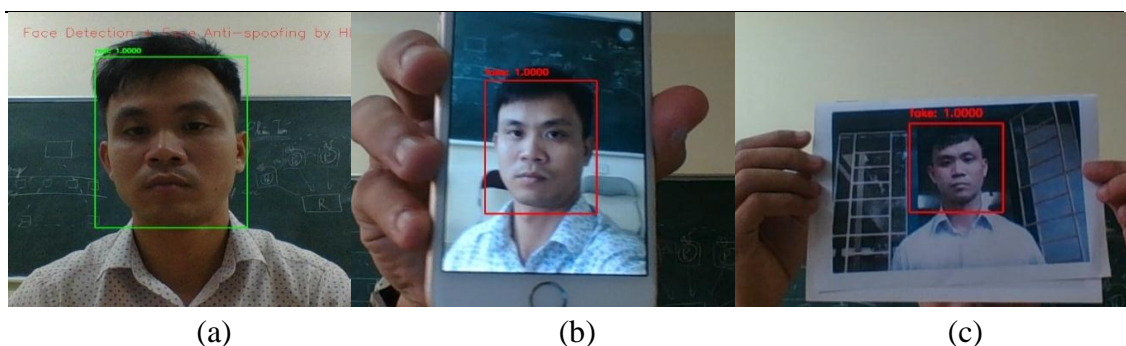
11 : count\_real = 0

12 : End if :

13 : else

14 : Hiển thị và vẽ hình bao quanh khuôn mặt với nhãn fake

15 : End



**Hình 4. Một số kết quả thực nghiệm phát hiện giả mạo khuôn mặt từ camera giám sát**  
 (a) khuôn mặt thật trước camera, (b) khuôn mặt giả mạo được chụp bằng điện thoại,  
 (c) khuôn mặt giả mạo được in từ ảnh

Để đánh giá về thời gian xử lý, chúng tôi thực nghiệm mô hình hduNet trên máy tính thông thường được trang bị CPU Intel® Core™ i5-5300U, RAM 4GB. Qua bảng 5 cho chúng ta thấy rằng, mặc dù hduNet có thời gian xử lý tối đa xấp xỉ đạt 15.4 FPS (Frames Per Second) nhưng với việc kết hợp vào bộ dò tìm khuôn mặt và hậu xử lý thì về tổng thể thời gian xử lý vẫn cho kết quả gần thời gian thực (real-time) với trung bình 22.5 FPS. Như vậy, kết hợp mô hình hduNet và áp dụng thêm kỹ thuật hậu xử lý, thuật toán của chúng tôi trở nên bền vững và có tiềm năng ứng dụng trong các giải pháp thực tế hơn. Hình 4 mô tả một số kết quả thực nghiệm khi chạy mô hình trong điều kiện thực tế.

**Bảng 5. Thời gian xử lý**

Mô hình	Max FPS
hduNet	15.4
Tích hợp hệ thống	22.5

## 5. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một hướng tiếp cận mới mà sử dụng phương pháp học chuyên giao trong các mạng nơ-ron tích chập để giải quyết vấn đề phát hiện giả mạo khuôn mặt. Ngoài ra, chúng tôi cũng đóng góp thêm để xây dựng một cơ sở dữ liệu dành cho việc phát hiện giả mạo khuôn mặt với đặc trưng khuôn mặt của người Châu Á. Cơ sở dữ liệu mới khắc phục được những hạn chế của 2 cơ sở dữ liệu LCC\_ FASD và NUAA, trở thành một cơ sở dữ liệu mang tính đại diện tốt, mức độ tổng quát và đa dạng cao. Nhìn chung, giải pháp của chúng tôi đơn giản nhưng hiệu quả và dễ sử dụng trong các tình huống ứng dụng thực tế. Trong tương lai, chúng tôi hướng tới tích hợp mô hình phát hiện giả mạo khuôn mặt vào trong những ứng dụng như điểm danh, chấm công, khóa cửa nhận dạng khuôn mặt.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] D. Timoshenko, K. Simonchik, V. Shutov, P. Zhelezneva and V. Grishkin (2019), Large Crowdcolllected Facial Anti-Spoofing Dataset, in *Computer Science and Information Technologies (CSIT)*, Yerevan, Armenia.
- [2] N. Evans (2019), *Handbook of Biometric Anti-spoofing: Presentation Attack Detection*, Springer.
- [3] Y. Li, K. Xu, Q. Yan, Y. Li, and R. H. Deng (2014), Understanding osn-based facial disclosure against face authentication systems, in *Proceedings of the 9th ACM symposium on Information, computer and communications security*. ACM.
- [4] Tiago de Freitas Pereira, Andre Anjos, José Mario De Martino, and Sebastien Marcel (2013), Can face anti-spoofing countermeasures work in a real world scenario?, in *International Conference on Biometrics (ICB)*.

- [5] Tiago de Freitas Pereira, Andre Anjos, José Mario De Martino, and Sebastien Marcel (2012), Lbp- top based countermeasure against face spoofing attacks, in *Asian Conference on Computer Vision*.
- [6] Jukka Maatta, Abdenour Hadid, and Matti Pietikainen (2011), Face spoofing detection from single images using micro-texture analysis, in *International joint conference on Biometrics (IJCB)*.
- [7] Keyurkumar Patel, Hu Han, and Anil K Jain (2016), Secure face unlock: Spoof detection on smartphones, in *IEEE Transactions on Information Forensics and Security*.
- [8] Z. Boulkenafet, J. Komulainen and A. Hadid (2017), Face Antispoofing Using Speeded-Up Robust Features and Fisher Vector Encoding, *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 24, pp. 141-145,.
- [9] J. Komulainen, A. Hadid and M. Pietikäinen (2013), Context based face anti-spoofing, in *IEEE Sixth International Conference on Biometrics: Theory, Applications and Systems (BTAS)*, Arlington, VA.
- [10] J. Yang, Z. Lei, S. Liao and S. Z. Li (2013), Face liveness detection with component dependent descriptor, in *International Conference on Biometrics (ICB)*, Madrid.
- [11] Zezheng Wang, Chenxu Zhao, Yunxiao Qin, Qiusheng Zhou, and Zhen Lei (2018), Exploiting temporal and depth information for multi-frame face anti-spoofing, *CoRR*, vol. abs/1811.05118.
- [12] Lei Li, Xiaoyi Feng, Zinelabidine Boulkenafet, Zhaoqiang Xia, Mingming Li, and Abdenour Hadid (2016), An original face anti-spoofing approach using partial convolutional neural network, in *Sixth International Conference on Image Processing Theory, Tools and Applications (IPTA)*.
- [13] Keyurkumar Patel, Hu Han, and Anil K Jain (2016), Cross-database face antispoofing with robust feature representation, in *Chinese Conference on Biometric Recognition*.
- [14] Javier Hernandez-Ortega, Julian Fierrez, Aythami Morales, and Pedro Tome (2018), Time analysis of pulse-based face antispoofing in visible and nir, in *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops*.
- [15] Shifeng Zhang, Xiaobo Wang, Ajian Liu, Chenxu Zhao, Jun Wan, Sergio Escalera, Hailin Shi, Zezheng Wang, and Stan Z Li (2018), Casia-surf: A dataset and benchmark for large-scale multi-modal face anti-spoofing, *CoRR*, vol. abs/1812.00408.
- [16] M. Sandler, A. Howard, M. Zhu, A. Zhmoginov and L. Chen (2018), MobileNetV2: Inverted Residuals and Linear Bottlenecks, in *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Salt Lake City, UT*.

- [17] J. Deng, W. Dong, R. Socher, L. Li, Kai Li and Li Fei-Fei (2009), ImageNet: A large-scale hierarchical image database, in *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Miami, FL.
- [18] Xiaoyang Tan, Yi Li, Jun Liu, and Lin Jiang (2010), Face liveness detection from a single image with sparse low rank bilinear discriminative model, in *the 11th European conference on Computer vision*, Berlin, Heidelberg.
- [19] Kingma Diederik P, Ba Jimmy (2015), Adam: A Method for Stochastic Optimization, in *the 3rd International Conference for Learning Representations*, San Diego.
- [20] Howard AG, Zhu M, Chen B, Kalenichenko D, Wang W, Weyand T, Andreetto M, Adam H (2017), MobileNets: Efficient Convolutional Neural Networks for Mobile Vision Applications, in *ArXiv*.

## A DEEP LEARNING TECHNIQUE FOR FRAUD FACE DETECTION

Le Van Hao, Trinh Thi Anh Loan, Le Viet Nam, Nguyen Duc Toan

### ABSTRACT

*Fraud face detection is a crucial procedure for many face recognition systems. In recent years, state-of-the-art approaches based on convolution neural networks (CNNs) show impressive results compared to traditional methods using hand-crafted features. In addition, the increasing trend of embedding the computer vision systems on mobile devices requires that the designed algorithms are capable of dealing with the time-critical constraint. In this paper, we first propose a CNN model, namely hduNet, developed from Google's MobilenetV2 that provides a flexible trade-off between latency and accuracy, to detect different face spoofing attacks. We then provide an addition dataset of roughly 5000 images capturing the characteristics of Vietnamse people. Combining with LCC\_FASD [1] dataset (which is only 1942 real face images, while having 16855 fake face images), the proposed model is carefully fine-tuned to optimize the computational cost as well as the classification accuracy. To validate the model, different experiments have been conducted, demonstrating interesting performance in comparison with other methods.*

**Keywords:** *Face anti-spoofing, transfer learning, fine-tunning, convolution neural network.*

\* Ngày nộp bài: 27/7/2020; Ngày gửi phản biện: 3/8/2020; Ngày duyệt đăng: 28/10/2020

\* Bài báo này là kết quả nghiên cứu từ đề tài cấp cơ sở mã số ĐT-2019-26 của Trường Đại học Hồng Đức.

# MÔ HÌNH TĂNG TRƯỞNG SOLOW NGẪU NHIÊN

Hoàng Diệu Hồng<sup>1</sup>

## TÓM TẮT

*Trong bài báo này, chúng tôi sẽ sử dụng công cụ của lý thuyết hệ động lực ngẫu nhiên để phân tích chi tiết mô hình tăng trưởng kinh tế Solow và nghiên cứu chuyển động đồng thời của nhiều quỹ đạo của các quá trình tiến hóa theo thời gian trong mô hình tăng trưởng kinh tế Solow.*

**Từ khóa:** Hàm phi tuyến, nhiễu, quỹ đạo, dáng điệu dài hạn của các quỹ đạo.

### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Tăng trưởng kinh tế là mục tiêu của tất cả các quốc gia. Mô hình kinh tế Solow đưa ra để giải thích sự tăng trưởng kinh tế dài hạn bằng cách nghiên cứu quá trình tích lũy vốn, lao động hoặc tăng trưởng dân số và sự gia tăng năng suất lao động. Mô hình tăng trưởng kinh tế Solow có ý nghĩa quan trọng đối với nền kinh tế Việt Nam đang trong thời kỳ quá độ lên chủ nghĩa xã hội. Trong giai đoạn này, sự đóng góp của vốn vào tốc độ phát triển kinh tế hay sự tăng trưởng của nền kinh tế là đáng kể. Trong mô hình tăng trưởng kinh tế của Solow công nghệ được coi là biến ngoại sinh, vì vậy nó rất phù hợp với thực trạng của nền kinh tế Việt Nam từ trước đến nay chủ yếu nhập công nghệ từ nước ngoài. Mặt khác, mô hình này còn đưa ra phương pháp hoạch toán tăng trưởng, cho phép xác định và tính toán sự đóng góp của các yếu tố đầu vào đã được sử dụng. Như vậy, có thể sử dụng phương pháp này để xác định, tính toán, đánh giá vai trò của các nguồn tăng trưởng trong nền kinh tế Việt Nam. Chính vì thế mô hình tăng trưởng kinh tế Solow được lựa chọn làm cơ sở lý thuyết cho việc xác định, đánh giá vai trò của các nguồn lực đối với tăng trưởng kinh tế Việt Nam.

Mục tiêu của bài báo là sử dụng công cụ của lý thuyết hệ động lực ngẫu nhiên để phân tích chi tiết mô hình tăng trưởng kinh tế Solow. Điểm mấu chốt ở đây là thay vì nghiên cứu chỉ một quỹ đạo thì ta nghiên cứu chuyển động đồng thời của nhiều quỹ đạo của các quá trình tiến hóa theo thời gian trong mô hình tăng trưởng kinh tế Solow.

### 2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

#### 2.1. Sự tăng trưởng kinh tế

Xét một nền kinh tế bao gồm các gia đình và các công ty đồng nhất như nhau. Bởi vậy, những cá thể coi như giá cả là đã được biết khi họ tiêu thụ, đầu tư, hoặc

<sup>1</sup> Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức

quyết định sản xuất. Có một sản phẩm thuần nhất và duy nhất trong nền kinh tế, mà nó có thể được tiêu thụ hoặc sử dụng như đầu vào chính trong sản xuất. Hai nhân tố là tiền vốn và nhân công cần phải có cho quá trình sản xuất.

Công nghệ được miêu tả bởi hàm sản xuất  $Y_t = F(K_t, L_t, z_t, a_t)$ . Trong đó  $K_t$  và  $L_t$  là tiền vốn và nhân công tại thời điểm  $t$ ;  $z_t, a_t$  là độ đo năng suất lao động và trạng thái của tiến bộ công nghệ;  $L_t, z_t, a_t$  là những biến ngẫu nhiên. Với mỗi  $z_t, a_t$  thì  $Y_t$  là đầu ra tổng hợp tại thời điểm  $t$  với điều kiện  $K_t$  vốn và  $L_t$  nhân công đã được sử dụng trong quá trình sản xuất. Ta giả thiết rằng với mỗi cặp  $(z_t, a_t)$  hàm  $Y_t$  là tân cổ điển và thuần nhất tuyến tính.

Hàm sản xuất  $F$  được gọi là *tân cổ điển* nếu nó đưa ra đại lượng dương giảm dần các sản phẩm thặng dư, tức là

$$d_K F > 0, d_{KK}^2 F < 0, d_L F < 0, d_{LL}^2 F < 0,$$

*Thuần nhất tuyến tính*, nghĩa là

$$\lambda F(K, L, z, a) = F(\lambda K, \lambda L, z, a), \quad \forall \lambda > 0.$$

Chúng ta giới hạn phân tích của chúng ta cho một công ty điển hình. Giả sử rằng nền kinh tế là đóng, tức là vốn đầu tư tại thời điểm  $t+1$  bằng nguồn tài sản chưa tiêu thụ trong các giai đoạn trước đó. Quy luật vận động của tiền vốn được cho bởi công thức.

$$K_{t+1} = F(K_t, L_t, z_t, a_t) + (1 - \delta_t)K_t - C_t \quad (2.1)$$

Trong đó,  $\delta_t$  là tốc độ mất giá của vốn đầu tư tại thời điểm  $t$  và  $C_t$  là tổng hợp tiêu thụ tại thời điểm  $t$ . Trong (2.1), ta giả thiết tổng mức đầu tư bằng tổng tiết kiệm của các hộ gia đình. Công ty xác nhận nhu cầu của họ về vốn và sức lao động bằng cách tối đa hóa lợi nhuận vào mỗi thời kỳ. Giả thiết rằng thị trường là cạnh tranh hoàn hảo, tiền vốn và sức lao động thu được từ sản phẩm thặng dư của họ trong trạng thái tự nhiên, tức là:

$$r_t = d_K F(K_t, L_t, z_t, a_t),$$

$$w_t = d_L F(K_t, L_t, z_t, a_t),$$

Trong đó, các biến ngẫu nhiên  $r_t, w_t$  là ký hiệu lãi suất thực và tiền lương thực.

## 2.2. Mô hình Solow ngẫu nhiên

Trong mô hình tăng trưởng chúng ta giả sử rằng đáng điệu của các hộ gia đình được miêu tả bởi sự tiêu thụ của một phần  $1-s_t$  của tổng sản phẩm trong mỗi giai đoạn. Ta còn giả thiết thêm rằng các hộ gia đình không bị thiếu tiện ích trong công việc sản xuất và có thể được sử dụng hết nhân công của họ. Ta đưa ra một giả thiết cụ thể như sau: Hàm sản xuất được cho bởi công thức

$$F(K_t, L_t, z_t, a_t) = g(z)F(K, aL) \quad (2.2)$$



Trong đó,  $g$  là một hàm đo được, còn  $F$  là một hàm tân cổ điển. Điều đó có nghĩa là tiến bộ kỹ thuật là bổ sung cho nhân công và các biến động sản xuất tham gia vào hàm sản xuất một cách nhân tính. Sự tiến hóa của nhân công có kỹ thuật,  $a_t L_t$  được cho bởi  $a_{t+1} L_{t+1} = (1+n_t) a_t L_t$  và biến ngoại sinh  $(n_t, \delta_t, s_t, g(z_t))$  được mô tả bởi quá trình ergodic.

Giả thiết về khả năng tiêu thụ của hộ gia đình là tương thích với giả thiết rằng vốn tư bản là không khả nghịch, tức là sản lượng trong mỗi giai đoạn là có thể tiêu thụ trong khi vốn tư bản mà không mất giá thì không thể tiêu thụ được.

Ta định nghĩa vốn tư bản cho mỗi lao động có kỹ thuật là  $k_t = \frac{K_t}{a_t L_t}$ , và nó được gọi là cường độ vốn tư bản. Với giả thiết trên, từ (3.1) ta có quy tắc ngẫu nhiên cho cường độ tiền vốn như sau

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= \frac{K_{t+1}}{a_{t+1} L_{t+1}} = \frac{(1-\delta_t)K_t + s_t g(z_t) F(K_t, a_t L_t)}{(1+n_t) a_t L_t} \\ &= \frac{(1-\delta_t)k_t + s_t g(z_t) f(k_t)}{(1+n_t)} \end{aligned}$$

Ở đây  $f(k) := F(k, 1)$ . Hàm  $f(k)$  là hàm sản xuất tân cổ điển.

Giả sử  $(\Omega, F, P, \theta)$  là hệ động lực ergodic;  $\delta, \xi, n$  là các biến ngẫu nhiên sao cho  $\delta(\theta' \omega)$  là tốc độ của sự mất giá,  $\xi(\theta' \omega) f(k_t)$  là  $\varepsilon$  phần của tổng sản phẩm được giành cho đầu tư, và  $n(\theta' \omega)$  là tốc độ tăng trưởng của lao động có kỹ thuật. Với một trạng thái ban đầu  $k_0$  cho trước của cường độ tiền vốn, sự tiến hóa ngẫu nhiên của cường độ tiền vốn được cho bởi phương trình sai phân ngẫu nhiên

$$k_{t+1} = \frac{(1-\delta(\theta' \omega))k_t + \xi(\theta' \omega) f(k_t)}{1+n_t(\theta' \omega)} \quad (2.3)$$

Phương trình (2.3) được gọi là *mô hình Solow ngẫu nhiên*. Nó sinh ra một hệ động lực ngẫu nhiên trên  $R_+$  khi ta đặt các điều kiện thích hợp lên các tham số.

**Định nghĩa 1.** Mô hình Solow ngẫu nhiên được cho bởi công thức

$$k_{t+1} = \frac{(1-\delta(\theta' \omega))k_t + \xi(\theta' \omega) f(k_t)}{1+n_t(\theta' \omega)} = h(\theta' \omega, k_t) \quad (2.4)$$

Ở đây,  $k_t$  là cường độ vốn tư bản (tiền vốn cho mỗi người làm việc trong giai đoạn  $t$ ). Phương trình (2.4) là phương trình sai phân ngẫu nhiên phi tuyến mô tả sự tiến hóa ngẫu nhiên của cường độ tiền vốn  $k_t$  theo thời gian  $t$ . Hàm  $f: R_+ \rightarrow R_+$  là một hàm tân cổ điển.

Các quá trình  $\delta(\theta' \omega)$ ,  $\xi(\theta' \omega)$ ,  $n(\theta' \omega)$  là các quá trình ergodic, là mô hình sự biến động dừng của tỷ lệ mất giá, tỷ phần đầu tư của tổng sản phẩm và tỷ lệ phát triển

dân cư. Tỷ phần đầu tư của tổng sản phẩm  $\xi(\theta^t \omega) f(k_t)$  mô tả một tỷ lệ tích lũy ngẫu nhiên và biến động nhân tính của kỹ thuật. Trường hợp  $f(0) = 0$  tương ứng với một nền kinh tế mà không thể sản xuất sản phẩm khi không có vốn. Trường hợp  $f(0) > 0$  thì có thể sản xuất ra sản phẩm với nhân công là đầu vào duy nhất. Trạng thái 0 là trạng thái bất động đối với mọi dãy biến động ngẫu nhiên nếu  $f(0) = 0$ . Khi  $\delta(\omega) \equiv \delta, \xi(\omega) \equiv \xi, n(\omega) \equiv n$ , (2.4) là mô hình Solow tắt định.

**Mệnh đề 2. [3]** *Giả sử rằng  $f$  là hàm dương tăng dần, lõm chặt và có đạo hàm liên tục trên  $R_{++}$ . Nếu  $\delta + n > 0, s > 0$  và  $f$  thỏa mãn điều kiện Inada*

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) < \frac{\delta + n}{s} < \lim_{k \rightarrow 0} f'(k) \leq \infty,$$

*thì mô hình Solow tắt định có một điểm bất động không tầm thường duy nhất  $\bar{k}(\delta, n, s)$ . Điểm bất động là ổn định và hút toàn cục trên  $R_{++}$ . Nếu  $f(0) > 0$  thì không cần đặt điều kiện lên  $\lim_{k \rightarrow 0} f'(k)$  và  $\bar{k}(\delta, n, s)$  là hút toàn cục trên  $R_+$ .*

### 2.3. Định lý điểm bất động ngẫu nhiên

Định lý này là trường hợp của định lý điểm bất động Banach cho hệ ngẫu nhiên phi tuyến. Cho  $G(\omega) \subset R^d, \omega \in \Omega$ , là một tập ngẫu nhiên, tức là  $G(\omega)$  là tập đóng hầu chắc chắn và  $\{\omega | G(\omega) \cap U = \emptyset\}$  là đo được với mọi tập mở  $U$ . Trong bài báo này, chúng ta sẽ xét biến ngẫu nhiên  $g(\omega)$  với giá trị trong  $G(\omega)$ . Giả sử  $\theta$  là một hệ động lực ergodic. Khi đó mọi quỹ đạo  $g(\theta^t \omega), t \in Z$ , của biến ngẫu nhiên:  $g : \Omega \rightarrow R^d$  hoặc

là tăng nhanh hơn mọi hàm số mũ. Tức là  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \|g(\theta^t \omega)\|}{t} = \infty$  hầu chắc chắn.

Hoặc là tăng chậm hơn mọi hàm số mũ: (tức là  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \|g(\theta^t \omega)\|}{t} = 0$  hầu chắc chắn).

$g$  được gọi là *tempered* nếu:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t} \|g(\theta^t \omega)\| = 0 \text{ với mọi } \delta > 0.$$

$H := \{ \text{Tất cả các biến ngẫu nhiên tempered } g(\omega) \text{ thỏa mãn } g(\omega) \in G(\omega) \}$ .

Tính *tempered* yếu hơn tính khả tích.

**Định lý 3.** *Cho  $\Phi$  là một hệ động lực ngẫu nhiên và ánh xạ  $x \mapsto \Phi(1, \omega, x)$  là khả vi liên tục hầu chắc chắn và  $\theta$  là ergodic. Giả sử tồn tại một tập ngẫu nhiên  $G(\omega), \omega \in \Omega$  sao cho  $H$  là một tập không rỗng và thỏa mãn:*

$$1) \Phi(1, \theta^{-1} \omega, g(\theta^{-1} \omega)) \in H \quad \forall g \in G$$

$$2) \sup_{x \in G(\omega)} \log \|d_x \Phi(1, \omega, x)\| \leq C(x) \text{ khi } EC(x) < 0$$

3) Nếu với một  $g \in H$  nào đó mà có  $\Phi(1, \theta^{-1}\omega, g(\theta^{-1}\omega))$  là dãy Cosi thì với mọi  $\omega \in \Omega$ , giới hạn của dãy đó là thuộc  $H$ .

Khi đó tồn tại một biến ngẫu nhiên  $g^* \in H$  hầu chắc chắn sao cho

$$(a) \quad \Phi(1, \omega, g^*(\omega)) = g^*(\theta\omega)$$

$$(b) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t, \omega, g(\omega)) - g^*(\theta^t \omega)\| = 0 \quad \forall g \in H$$

(c)  $g^*(\omega)$  là xác định duy nhất.

Các điều kiện 1), 3) là các điều kiện về tính bất biến, tính co đều trung bình và tính đầy đủ. Kết luận khẳng định về sự tồn tại một điểm bất động ngẫu nhiên  $g^*$  mà có  $H$  là tập con của miền hút của nó. Với nhiều tầm thường định lý này chính là định lý Banach về điểm bất động đối với ánh xạ khả vi.

Dáng điệu dài hạn của quỹ đạo với giá trị khởi đầu  $g(\omega) \in G(\omega)$  là hoàn toàn xác định bởi quỹ đạo  $g^*(\theta^t \omega)$ . Trong trường hợp đặc biệt ta có:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} \Phi(s, \omega, g(\omega)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} g^*(\theta^s \omega) = E g^*,$$

Và như vậy nó là hằng số hầu chắc chắn nếu  $g^*$  là khả tích. Nếu  $g^*(\omega) > 0$  thì tốc độ tăng trưởng

$$\gamma_{g^*}(\omega) = \frac{g^*(\theta\omega) - g^*(\omega)}{g^*(\omega)} \text{ là } \textit{tempered},$$

Do tính *tempered* của  $g^*$  và  $E \log(1 + \gamma_{g^*}(\omega)) = 0$  nếu  $\log g^*$  là khả tích.

*Chứng minh*

Với  $\varepsilon > 0$ ,  $g_1 \in H$ ,  $g_2 \in H$ ,  $\exists i_0(\omega, \varepsilon, g_1, g_2)$  sao cho với  $i > i_0$

$$\begin{aligned} & d_\omega(\Phi(i, \theta^{-i}\omega, g_1(\theta^{-i}\omega)), \Phi(i, \theta^{-i}\omega, g_2(\theta^{-i}\omega))) \\ & \leq d_\omega(\Phi(1, \theta^{-1}\omega, \Phi(i-1, \theta^{-i}\omega, g_1(\theta^{-i}\omega))), \Phi(1, \theta^{-1}\omega, \Phi(i-1, \theta^{-i}\omega, g_2(\theta^{-i}\omega)))) \\ & \leq e^{k(\theta^{-1}\omega)} d_{\theta^{-1}\omega}(\Phi(i-1, \theta^{-i}\omega, g_1(\theta^{-i}\omega)), \Phi(i-1, \theta^{-i}\omega, g_2(\theta^{-i}\omega))) \\ & \leq \exp\left(\sum_{j=1}^i k(\theta^{-j}\omega)\right) d_{\theta^{-i}\omega}(g_1(\theta^{-i}\omega), g_2(\theta^{-i}\omega)) < e^{\left(\frac{1}{2}\right)Ki} < \varepsilon (*) \end{aligned}$$

Do tính *tempered* của  $\omega \rightarrow d_\omega(g_1(\omega), g_2(\omega))$

Từ (\*) suy ra

$$\begin{aligned} & d_\omega(\Phi(i, \theta^{-i}\omega, g(\theta^{-i}\omega)), \Phi(i+1, \theta^{-i-1}\omega, g(\theta^{-i-1}\omega))) \\ & \leq \exp\left(\sum_{j=1}^i k(\theta^{-j}\omega)\right) d_{\theta^{-i}\omega}(g(\theta^{-i}\omega), \Phi(1, \theta_{-i-1}\omega, g(\theta^{-i-1}\omega))) (**). \end{aligned}$$

Với  $0 \leq t \leq t_1$  và do (\*), (\*\*), ta có

$$\begin{aligned}
 & d_{\omega}(\Phi(t, \theta^{-t} \omega, g(\theta^{-t} \omega)), \Phi(t_1, \theta^{-t_1} \omega, g(\theta^{-t_1} \omega))) \leq \exp\left(\sum_{j=1}^{[t]} k(\theta^{-j} \omega)\right) \\
 & \times d_{\theta^{-[t]} \omega}(\Phi(t-[t], \theta^{-t+[t]} \theta^{-[t]} \omega, g(\theta^{-t+[t]} \theta^{-[t]} \omega)), \Phi(t_1-[t], \theta^{-t_1+[t]} \theta^{-[t]} \omega, g(\theta^{-t_1+[t]} \theta^{-[t]} \omega))) \\
 & \leq \exp\left(\sum_{j=1}^{[t]} k(\theta^{-j} \omega)\right) \times d_{\theta^{-[t]} \omega}(\Phi(t-[t], \theta^{-t+[t]} \theta^{-[t]} \omega, g(\theta^{-t+[t]} \theta^{-[t]} \omega)), g(\theta^{-t} \omega)) \\
 & + \sum_{j=0}^{-[t_1]-[t]-1} d_{\theta^{-[t]} \omega}(\Phi(j, \theta^{-t-[t]} \omega, g(\theta^{-t-j} \omega)), \Phi(j+1, \theta^{-t-j-1} \omega, g(\theta^{-[t]j-1} \omega))), \Phi(j+1, \theta^{-[t]-j-1} \omega, g(\theta^{-[t]j-1} \omega))) \\
 & + d_{\theta^{-[t]} \omega}(\Phi([t_1]-[t], \theta^{-[t_1]} \omega, g(\theta^{-[t_1]} \omega)), \Phi(t_1-[t], \theta^{-t_1+[t]} \theta^{-[t]} \omega, g(\theta^{-t_1+[t]} \theta^{-[t]} \omega)))
 \end{aligned}$$

Đặt  $i = [t]$ ,  $h(\omega) := 2 \sup_{s \in [0,1]} d_{\omega}(\Phi(s, \theta^{-s} \omega, g(\theta^{-s} \omega)), g(\omega))$

Với  $t_1 \geq t$ ,

$$\begin{aligned}
 & d_{\omega}(\Phi(t, \theta^{-t} \omega, g(\theta^{-t} \omega)), \Phi(t_1, \theta^{-t_1} \omega, g(\theta^{-t_1} \omega))) \\
 & \leq \exp\left(\sum_{j=1}^i k(\theta^{-j} \omega)\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\exp\left(\sum_{j=1}^m k(\theta^{-i-j} \omega)\right) l(\theta^{-i-m} \omega)\right) = M
 \end{aligned}$$

$M$  là hữu hạn với  $t \geq 0$  do tính *tempered* của  $h(\omega)$

$$\sum_{j=1}^m k(\theta^{-i-j} \omega) \approx Kn \rightarrow -\infty, \quad i \in \mathbb{Z}^+$$

Ta sẽ chứng minh rằng  $M \rightarrow 0$ , khi  $i \rightarrow \infty$ .

Với  $\varepsilon > 0$  có  $i_0(\varepsilon, \omega)$  sao cho  $\forall i \geq i_0(\varepsilon, \omega)$

$$\log^+ h(\theta^{-i} \omega) \leq \varepsilon i, \quad \left| \sum_{j=1}^i (k(\theta^{-j} \omega) - K) \right| \leq \varepsilon i$$

Cho  $a > 0$  bất kỳ, chọn

$$0 < \varepsilon < -\frac{1}{4} \max\left(-\frac{a}{2}, K\right).$$

$$\forall i \quad \varepsilon^{\frac{a}{2}i} < \sum_{m=0}^{\infty} \left(\exp\left(\sum_{j=1}^m k(\theta^{-i-j} \omega)\right) h(\theta^{-i-m})\right) \leq \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m\varepsilon} < \infty, \text{ nên}$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} e^{-a \cdot i} < \sum_{m=0}^{\infty} \left(\exp\left(\sum_{j=1}^m k(\theta^{-i-j} \omega)\right) h(\theta^{-i-m})\right) = 0, \quad i > i_0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\exp\left(\sum_{j=1}^m k(\theta^{-i-j} \omega)\right) h(\theta^{-i-m})\right) \text{ là } \textit{tempered}$$

Từ đó  $M \rightarrow 0$ , khi  $i \rightarrow \infty$

Nên  $\Phi(t, \theta^{-t} \omega, g(\theta^{-t} \omega))$  là dãy *Cauchy*, giới hạn của nó được ký hiệu là  $g^*(\omega)$

và  $g^* \in H$

Do tính liên tục của  $\Phi$

$$\begin{aligned} \Phi(1, \omega, g^*(\omega)) &= \Phi(1, \omega, \lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi(t, \theta^{-t}, g(\theta^{-t}\omega))) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t+1, \theta^{-t-1}\omega, g^*(\theta^{-t-1}\omega)) = g^*(\theta\omega) \end{aligned}$$

Vậy:

$$\Phi(1, \omega, g^*(\omega)) = g^*(\theta\omega)$$

$$\text{và } \lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t, \omega, g(\omega)) - g^*(\theta^t\omega)\| = 0 \quad \forall g \in H$$

*Tính duy nhất của  $g^*(\omega)$* : Giả sử tồn tại hai điểm bất động  $g_1^*, g_2^* \in H$ . Từ (\*) ta có  $g_1^*(\omega) = g_2^*(\omega)$

Nên  $g^*(\omega)$  là duy nhất.

**Mệnh đề 4. [3]** *Nếu tập hợp  $H$  các biến ngẫu nhiên tempered trong định lý 3 chứa một biến ngẫu nhiên hằng  $g(\omega) \equiv g$  thì điểm bất động ngẫu nhiên*

$$g^* : \Omega \rightarrow R^d \text{ là đo được đối với quá khứ}$$

$$F^- := \sigma\{\omega \mapsto \Phi(s, \theta^{-t}\omega) | 0 \leq s \leq t\}.$$

#### 2.4. Dáng điệu động lực của mô hình Solow ngẫu nhiên

Chúng ta sẽ chứng tỏ rằng động lực học của mô hình Solow ngẫu nhiên là xác định bởi một điểm bất động ngẫu nhiên ổn định duy nhất và hút toàn cục. Đặc biệt, nó đảm bảo rằng dáng điệu dài hạn của tất cả các quỹ đạo của cường độ tiền vốn là như nhau và được xác định bởi quỹ đạo của điểm bất động ngẫu nhiên này.

**Định lý 5.** *Giả thiết các quá trình ngẫu nhiên biểu diễn tốc độ của sự mất giá và phát triển dân số, và tích của tỷ lệ tiết kiệm và biến động trong sản xuất, tương ứng lấy giá trị*

$$\delta(\omega) \in [\delta_{\min}, \delta_{\max}] \subset [0, 1]$$

$$n(\omega) \in [n_{\min}, n_{\max}] \subset (-1, \infty)$$

$$\xi(\omega) \in [\xi_{\min}, \xi_{\max}] \subset (0, \infty) \text{ với } E\xi < \infty$$

*Giả thiết rằng  $f$  là không âm, tăng dần, lõm chặt và có đạo hàm liên tục.*

*Giả sử rằng*

$$1. \quad \delta_{\max} + n_{\max} > 0,$$

$$2. \quad 0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) < \frac{\delta_{\max} + n_{\max}}{\xi_{\min}} < \lim_{k \rightarrow 0} f'(k) \leq \infty, \text{ và}$$

$$3. \quad E \log \frac{1 - \delta(\omega) + \xi(\omega) f'(k)}{1 + n(\omega)} < 0$$

*Trong đó  $\bar{k} := \bar{k}(\delta_{\max}, n_{\max}, \xi_{\min})$  là một trạng thái bất động không tầm thường của mô hình Solow tất định.*

Khi đó tồn tại một điểm bất động ngẫu nhiên dương duy nhất  $k^*$  của hệ động lực ngẫu nhiên  $\Phi$  trong  $R_+$  được sinh ra bởi mô hình tăng trưởng Solow ngẫu nhiên. Điểm  $k^*$  là ổn định, đo được đối với quá khứ và hút toàn cục trên  $R_{++}$ , tức là  $\forall k > 0$  thì  $\|\Phi(t, \omega, k) - k^*(\theta^t \omega)\| \rightarrow 0$  khi  $t \rightarrow \infty$  hầu chắc chắn. Do đó đáng điều dài hạn của tất cả các quỹ đạo là xác định duy nhất bởi điểm bất động ngẫu nhiên  $k^*$ .

Nếu  $f(0) > 0$  thì không cần điều kiện đặt lên  $\lim_{k \rightarrow 0} f'(k)$  và  $k^*$  hút toàn cục trên  $R_+$ .

*Chứng minh*

Chứng minh này là một áp dụng của Định lý 3 về điểm bất động ngẫu nhiên. Đặt  $G := [\bar{k}(\delta_{\max}, n_{\max}, \xi_{\min}), \infty)$ .  $G(\omega) \equiv G$  là một tập hợp ngẫu nhiên. Do tính đóng của  $G$ ,  $H \neq \emptyset$ ,  $\bar{k} = \bar{k}(\delta_{\max}, n_{\max}, \xi_{\min})$ , áp dụng Định lý 3 ta sẽ nhận được điểm bất động ngẫu nhiên không tầm thường  $k^*$ .

*Tính bất biến của  $H$* : Ta kiểm tra điều kiện (1) của Định lý 3. Vì  $h(\omega, k) \geq \bar{k}$  nên  $G$  là bất biến dương,  $\bar{k} = \bar{k}(\delta_{\max}, n_{\max}, \xi_{\min})$  là điểm bất biến không tầm thường nhỏ nhất của tất cả các ánh xạ tất định  $h(k)$ .

$\Phi(1, \theta^{-1}\omega, g(\theta^{-1}\omega)) \in G$  với mọi  $g \in G$ .

Từ tính lõm của  $f$  ta suy ra:  $f(k) \leq f(y) + f'(y)k$  với mọi  $k$  và  $y > 0$  cố định tùy ý. Do đó

$$\Phi(1, \omega, k) \leq \frac{1 - \delta(\omega) + \xi(\omega)f'(y)}{1 + n(\omega)}k + \frac{\xi(\omega)f(y)}{1 + n_{\min}}.$$

Vì  $E\xi < \infty$  nên  $\xi$  là *tempered*, suy ra:  $\frac{1}{1 + n(\omega)} \leq \frac{1}{1 + n_{\min}}$ .

Suy ra hàm  $\Phi(1, \theta^{-1}\omega, g(\theta^{-1}\omega))$  là *tempered*

*Tính chất 2) của Định lý 3: tính hút.* Điều này được suy ra trực tiếp từ giả thiết 3) của Định lý 5 bởi vì  $f$  là giảm vì vậy nó nhận giá trị max tại phần tử nhỏ nhất của  $G$ , tức là  $\sup_{k \in G} f'(k) = f'(\bar{k})$

*Tính chất 3) của Định lý 3.* Cho  $g \in G$  và giả sử  $\Phi(t, \theta^{-1}\omega, g(\theta^{-1}\omega))$  là dãy Cosi với mọi  $\omega$ , thì giới hạn là thuộc  $G(\omega)$  với mọi  $\omega$ , vì  $G(\omega) \equiv G$  là bất biến dương và đóng.

Để chứng minh 3) ta chỉ cần kiểm tra được rằng  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, \theta^{-t}\omega, g(\theta^{-t}\omega))$  là biến ngẫu nhiên *tempered*.

$$\text{Đặt } x_{t+1} = a(\theta^t \omega)x_t + b(\theta^t \omega), \text{ với } a(\omega) := \frac{1 - \delta(\omega) + \xi(\omega)f'(k)}{1 + n(\omega)}, b(\omega) := \frac{\xi(\omega f(\bar{k}))}{1 + n_{\min}}.$$

Khi đó  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(1, \theta^{-1}\omega, g(\theta^{-1}\omega))$  bị chặn trên bởi một điểm bất động ngẫu nhiên  $x^*(\omega)$  là ổn định bởi giả thiết 3) và do đó hút bất kỳ biến ngẫu nhiên *tempered* nào.

*Sự tồn tại của  $x^*(\omega)$* : Có duy nhất một điểm bất động ngẫu nhiên là

$$x^*(\omega) := b(\theta^{-1}\omega) + \sum_{i=1}^{\infty} b(\theta^{-(i+1)}\omega) \cdot \prod_{j=1}^i a(\theta^{-j}\omega)$$

Nhận xét rằng với mỗi  $0 < \varepsilon < -E \log a$ , tồn tại  $t(\varepsilon, \omega)$  để

$$\prod_{j=1}^i a(\theta^{-j}\omega) < e^{-\varepsilon i} \text{ với } i \geq t(\varepsilon, \omega).$$

Do tính *tempered* của  $b(\omega)$  (được suy ra từ  $Eb < \infty$ ), ta nhận được sự tồn tại hầu chắc chắn của  $x^*(\omega)$ .

Tính *tempered* của  $x^*(\omega)$ : Ta có  $E \log a < 0$  và  $b$  là *tempered*, vì vậy với mọi  $\varepsilon > 0$  tồn tại  $s_0(\omega, \varepsilon)$  sao cho  $\forall s > s_0(\omega, \varepsilon)$  nên

$$\log b(\theta^{-s}\omega) \leq \varepsilon s \text{ và } \left| \sum_{j=1}^s (\log a(\theta^{-j}\omega) - E \log a) \right| \leq \varepsilon s$$

Bởi vì  $a(\omega) > 0$  và  $b(\omega) > 0$  ta có biểu diễn sau

$$x^*(\theta^{-t}\omega) = \exp \log b(\theta^{-(t+1)}\omega) + \sum_{i=1}^{\infty} \exp[\log b(\theta^{-(i+t+1)}\omega) + \sum_{j=1}^{t+1} (\log a(\theta^{-j}\omega) - E \log a) - \sum_{j=1}^i (\log a(\theta^{-j}\omega) - E \log a) + iE \log a]$$

Vì vậy, với  $\varepsilon < \frac{|E \log a|}{2}$  và với mọi  $t > s_0(\omega, \varepsilon)$  ta có:

$$x^*(\theta^{-t}\omega) \leq \exp(\varepsilon(t+1)) + \sum_{i=1}^{\infty} \exp(\varepsilon((i+1+t) + (t+i) + iE \log a)) \\ \leq \exp(\varepsilon(t+1)) + \exp(\varepsilon(3t+1)) \frac{\exp(2\varepsilon + E \log a)}{1 - \exp(2\varepsilon + E \log a)}.$$

Do đó  $x^*(\omega)$  tăng chậm hơn mọi hàm số mũ, và vì vậy nó là *tempered*.

*Tính hút toàn bộ*: Nếu mọi quá trình nhiễu là tầm thường thì  $\bar{k}(\delta, n, \xi)$  là trạng thái bất động hút toàn cục trên  $R_{++}$ .

Tính chất đơn điệu sau đây được thỏa mãn:

$$\Phi(1, \omega, k) \equiv h(\omega, k) \geq k \text{ với mọi } \omega \in \Omega \text{ và mọi } k \leq \bar{k} := \bar{k}(\delta_{\max}, n_{\max}, \xi_{\min})$$

Với mỗi  $k > 0$  tồn tại  $t(\omega, k)$ , sao cho nếu  $\delta(\theta^s \omega) \leq \delta$  với mọi  $0 \leq s \leq t(\omega, k)$  thì  $\Phi(t(\omega, k), \omega, k) > \bar{k}$ .

Từ tính ergodic của  $\theta$  ta suy ra

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^t 1_{[0, \delta]}(\delta(\theta^s \omega)) = P\{\omega | \delta(\omega) \leq \delta\} > 0,$$

Và do đó ta nhận được

$P\{\omega|\delta(\omega) \leq \delta \text{ với vô hạn } \delta \geq 0\} = 1$ . Vậy tồn tại đại lượng hữu hạn  $T(\omega, k)$  với mọi  $\omega, k$  và thỏa mãn yêu cầu nêu ở trên.

Tính duy nhất và  $F^-$  đo được

Từ tính hút toàn cục từ Mệnh đề 4 suy ra tính duy nhất của điểm bất động ngẫu nhiên trong  $R_{++}$ . Cũng từ Mệnh đề 4 ta có  $F^-$  đo được.

**Ví dụ.** Xét hàm  $f(k) = (1 + Ak^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$  với  $0 \neq \alpha < 1$ , và  $A > 0$ .

Điều kiện (2) và (3) của Định lý 5 được thỏa mãn nếu

$$A < \min\left\{\left(\frac{\delta_{\max} + n_{\max}}{\xi_{\min}}\right)^\alpha, \frac{\xi_{\min}^{1-\alpha}}{E\xi} \frac{E\delta + n_{\min}}{(\delta_{\max} + n_{\max})^{1-\alpha}}\right\}$$

Ta có  $\frac{f(k)}{k} = (A + k^{-\alpha})^{\frac{1}{\alpha}} \rightarrow A^{\frac{1}{\alpha}}$  khi  $k \rightarrow \infty$

Điều kiện Inada (2) của Định lý 5 được suy ra bởi bất đẳng thức

$$A \leq \left(\frac{\delta_{\max} + n_{\max}}{\xi_{\min}}\right)^\alpha \quad (*)$$

Từ đó  $\bar{k} = \left(\frac{1}{\frac{\alpha_{\max} + n_{\max}}{\xi_{\min}} - A}\right)^\alpha$

Và vì vậy  $f'(k) = A\left(\frac{\delta_{\max} + n_{\max}}{\xi_{\min}}\right)^{1-\alpha}$

Trong đó  $\bar{k} > 0$  do (\*)

Mặt khác ta có điều kiện hút (3) trong Định lý 5 viết lại như sau:

$$\text{Elog}(1 - \delta(\omega) + \xi(\omega) f'(k)) < \text{Elog}(1 + n(\omega))$$

Do hàm log là lõm (tính chất này suy ra  $\text{Elog} < \log E$  do bất đẳng thức Jensen) ta thu được điều kiện đủ sau:

$$\text{E}(1 - \delta(\omega) + \xi(\omega) f'(k)) < \exp(\text{Elog}(1 + n(\omega)))$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$f'(\bar{k}(\delta_{\max}, n_{\max}, \xi_{\min})) < \frac{E\delta(\omega) - 1 + \exp(E \log(1 + n(\omega)))}{E\xi(\omega)} \quad (2.5)$$

Sử dụng  $n(\omega) \geq n_{\min}$ , (3.5) được suy ra từ bất đẳng thức sau

$$f'(\bar{k}(\delta_{\max}, n_{\max}, \xi_{\min})) < \frac{E\delta(\omega) + n_{\min}}{E\xi(\omega)} \quad (2.6)$$

Sử dụng (3.6) ta có điều kiện (3) được thỏa mãn khi

$$0 < A < \frac{\xi_{\min}^{1-\alpha}}{E\xi} \frac{E\delta + n_{\min}}{(\delta_{\max} + n_{\max})^{1-\alpha}}$$



### 3. KẾT LUẬN

Bài báo tập trung nghiên cứu về mô hình tăng trưởng kinh tế Solow và sử dụng công cụ của lý thuyết hệ động lực ngẫu nhiên phân tích chi tiết mô hình tăng trưởng Solow với tham biến ngẫu nhiên. Bài báo đã làm sáng tỏ được rằng động lực học của mô hình Solow ngẫu nhiên được mô tả hoàn toàn bởi một điểm ngẫu nhiên hút toàn bộ.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Trần Hùng Thao (2000), *Tích phân ngẫu nhiên và phương trình vi phân ngẫu nhiên*, Nxb. Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
- [2] Trần Thọ Đạt (2010), *Mô hình tăng trưởng kinh tế*, Nxb. Đại học Kinh tế Quốc dân, Hà Nội.
- [3] B.Schmalfuss(1996), *A random fixed poin theorem Based on Lyapunov exponents*, *Randdtaionom and Computational Dynamics*, 4,257-268.
- [4] B.Schmalfuss (1998), *A random fixed poin theorem and the random graph transformation*, *J.Math. App.* 225,91-113.
- [5] Mirman, L.J. (1972), *On the existence of steady measur for one sector growth models with uncertain technology*, *International Economic Review*, 12, 271-286.
- [6] Mirman, L.J.(1973), *The steady state behavior of a class of one sector growth models with uncertain technology*, *Journal of Economic Theory* 6, 219-242.

## THE SOLOW ECONOMIC GROWTH MODEL

Hoang Dieu Hong

### ABSTRACT

*In this paper, we use the theory of random dynamic system as a tool to analyze in detail the Solow economic growth model and study the simultaneous motions of orbits of evolution processes over time in the Solow economic growth model.*

**Keywords:** *Non-linear function, interference, orbit, long-termed pattern of orbits.*

\* Ngày nộp bài: 21/9/2020; Ngày gửi phản biện: 13/10/2020; Ngày duyệt đăng: 28/10/2020

\* Bài báo này là kết quả nghiên cứu từ đề tài cấp cơ sở mã số ĐT-2019-17 của Trường Đại học Hồng Đức.

# THÀNH PHẦN THỨC ĂN CỦA MỘT SỐ LOÀI LƯỠNG CƯ THUỘC HỌ NHÁI BẦU (MICROHYLIDAE) TẠI VƯỜN QUỐC GIA BẾN EN, TỈNH THANH HÓA

Trịnh Thị Hồng<sup>1</sup>, Nguyễn Hữu Tân<sup>2</sup>, Thiều Thị Huyền<sup>1</sup>

## TÓM TẮT

Qua phân tích các mẫu thức ăn trong dạ dày của 25 cá thể lưỡng cư thuộc họ Nhái bầu ở Vườn Quốc gia Bến En, chúng tôi đã ghi nhận được 906 mẫu thức ăn của 21 loại khác nhau. Thành phần thức ăn của *Kalophrynus interlineatus* có chỉ số đa dạng cao nhất ( $H' = 1,82$ ). Loại thức ăn ghi nhận nhiều nhất là Formicidae với tần số bắt gặp 22 lần. Về thể tích mẫu thức ăn, họ Scarabaeidae với  $124,83 \text{ mm}^3$  (chiếm 23,22% tổng thể tích mẫu thức ăn phân tích), thấp nhất là họ Salticidae với  $0,1 \text{ mm}^3$  (chiếm 0,02%). Họ Formicidae có chỉ số quan trọng cao nhất trong thành phần thức ăn của họ Nhái bầu với 47,89%, tiếp theo là họ Kalotermitidae với 22,56%, họ Armadillidae với 11,33%.

**Từ khóa:** Thành phần thức ăn, chỉ số quan trọng, họ Nhái bầu, Microhylidae, Vườn quốc gia Bến En, tỉnh Thanh Hóa.

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Vườn quốc gia Bến En thuộc địa bàn 2 huyện Như Thanh và Như Xuân, tỉnh Thanh Hóa, có diện tích 13.886 ha rừng, là nơi chuyển tiếp giữa đồng bằng Thanh Hoá - Nghệ Tĩnh rộng lớn với núi cao Trường Sơn Bắc. Đỉnh núi cao nhất tại Bến En có độ cao 497 m so với mực nước biển, vì vậy thảm thực vật Bến En thuộc kiểu rừng nhiệt đới thường xanh đai thấp. Vườn quốc gia Bến En được đánh giá có hệ sinh thái động thực vật phong phú và đa dạng, đại diện cho hệ sinh thái đai thấp ở khu vực Bắc Trung Bộ Việt Nam và có vai trò quan trọng trong việc bảo tồn đa dạng sinh học [1].

Cho đến nay các nghiên cứu về lưỡng cư ở Vườn quốc gia Bến En chủ yếu về thành phần loài như công trình của Nguyễn Văn Sáng và cộng sự (2000) [2], chưa có công trình nào nghiên cứu đầy đủ về đặc điểm sinh học sinh thái, đặc biệt là đặc điểm dinh dưỡng của chúng. Bài viết này cung cấp các dẫn liệu về đặc điểm dinh dưỡng của một số loài lưỡng cư thuộc họ Nhái bầu làm cơ sở khoa học cho việc bảo tồn và phát triển tài nguyên động vật lưỡng cư.

## 2. VẬT LIỆU VÀ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

### Phương pháp thu mẫu

Mẫu vật của các loài lưỡng cư thuộc họ Nhái bầu được thu thập theo 2 đợt trên địa bàn Vườn quốc gia Bến En gồm: đợt 1, từ ngày 11 - 14/05/2017, thu mẫu xung

<sup>1</sup> Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức

<sup>2</sup> Phòng Kiểm định chất lượng và Khảo thí, Trường Đại học Hồng Đức

quanh trụ sở Vườn quốc gia Bến En tại xã Hải Vân và đợt 2 từ ngày 19 - 22/08/2017 ở khu vực rừng tại trạm kiểm lâm Điện Ngọc, huyện Như Thanh, tỉnh Thanh Hóa.

Do các mẫu vật cần được lưu trữ để nghiên cứu đặc điểm hình thái nên chúng được làm chết bằng thuốc hiệu Orajel (thành phần Benzalkonlum chloride 0,02%, Benzocalne 20% và Zinc chloride 0,1%), sau đó tiến hành mổ tách dạ dày, thời gian tiến hành từ 22h - 00h. Các mẫu dạ dày được đóng gói trong các túi zip có chứa cồn, ghi kí hiệu mẫu, ngâm trong cồn 70% để phục vụ phân tích và định loại thành phần thức ăn. Tất cả các mẫu lưỡng cư và thức ăn của chúng được lưu giữ tại phòng thí nghiệm Động vật, Trường Đại học Hồng Đức.

Định loại lưỡng cư theo các tài liệu của Bourret (1942) [3], Inger et al. (1999), Ziegler T. & Köhler J., (2001) [4], Ohler et al. (2003) [5] và một số tài liệu khác có liên quan. Tên khoa học và phổ thông của loài theo Nguyen et al. (2009) [6] và Frost (2018) [7].

Các mẫu thức ăn được phân tích và định loại dưới kính lúp soi nổi Leica S6E tại phòng thí nghiệm hệ thống côn trùng của Viện Sinh thái và Tài nguyên sinh vật. Mẫu thức ăn được đo, đếm, chụp ảnh dưới kính lúp Leica M80. Nghiên cứu định loại mẫu thức ăn đến họ theo tài liệu của Naumann (1991) [8], Naumann I. D., et al. (1993a) [9], Naumann I. D., et al. (1993b) [10].

Các thông số phân tích thành phần thức ăn gồm:

Tần số (F) thể hiện sự phong phú của một số loại con mồi thu được từ các mẫu dạ dày:

$$\% F = \frac{\text{Số dạ dày có con mồi thuộc loại } i}{\text{Tổng số dạ dày có thức ăn}} \times 100\%$$

Số lượng (N) là số mẫu thức ăn của một loại con mồi; thể tích (V, mm<sup>3</sup>) của mỗi mẫu thức ăn được ước tính bằng công thức theo tài liệu của Magnusson et al. (2003) [11] và Ngo C. D. et al. (2014) [12]:  $V = \frac{4}{3} * \pi * \frac{L}{2} * \left(\frac{W}{2}\right)^2$ , trong đó: L là chiều dài của mẫu thức ăn, W: là chiều rộng của mẫu thức ăn. Chỉ số quan trọng (Ix) của mỗi loại thức ăn được tính theo công thức mô tả trong tài liệu của Caldart V.M et al. (2012) [13], Ngo C. D. et al. (2014) [12] và Phạm Văn Anh, Nguyễn Quảng Trường (2018) [14]:  $I_x(\%) = (F\% + N\% + V\%)/3$ .

Chỉ số đa dạng sinh học Shannon - Weiner (H') (Shannon, C. E., and Weiner, W., 1949) [15]:

$$H' = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \ln(p_i)$$

$$\text{Trong đó: } p_i = \frac{n_i}{N}$$

n: số lượng loài; n<sub>i</sub>: số lượng cá thể loài i; N: tổng số cá thể thu được.

### 3. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU VÀ THẢO LUẬN

#### 3.1. Về thành phần thức ăn của các loài

Chúng tôi đã tiến hành nghiên cứu thành phần thức ăn 25 cá thể của 5 loài thuộc họ Nhái bầu (Microhylidae), trong đó 2 cá thể Cóc đốm (*Kalophrynus interlineatus*), 6 cá thể

Ễnh ương thường (*Kaloula pulchra*), 10 cá thể Nhái bầu hoa (*Microhyla fissipes*), 3 cá thể Nhái bầu vân (*Microhyla pulchra*) và 4 cá thể Nhái bầu hây môn (*Microhyla heymonsi*). Kết quả nghiên cứu được thống kê tại bảng 1.

Kết quả ở bảng 1 cho thấy, đã ghi nhận được 906 mẫu thức ăn, định loại được 19 họ thuộc 8 bộ của 3 lớp, chủ yếu thuộc lớp côn trùng với 12 họ thuộc 5 bộ. Một số mẫu thức ăn đã bị nghiền nhỏ và đã bị phân hủy một phần nên việc định loại và đo đạc rất khó khăn.

Có 65 mẫu thức ăn thuộc 9 họ, 6 bộ thu được ở dạ dày của loài *K. interlineatus* (chiếm 7,17% tổng số mẫu trong các dạ dày), 525 mẫu thức ăn thuộc 15 họ, 8 bộ thu được ở loài *K. pulchra* (chiếm 57,95%), 149 mẫu thức ăn thuộc 5 họ, 4 bộ thu được từ loài *M. fissipes* (chiếm 16,45%), 30 mẫu thức ăn của 5 họ, 4 bộ thu được từ loài *M. pulchra* (chiếm 3,53%) và 135 mẫu thức ăn thuộc 5 họ, 4 bộ thu được trong dạ dày của loài *M. heymonsi* (chiếm 14,9%). Như vậy, thành phần thức ăn của loài *K. pulchra* đa dạng nhất, tiếp đến là loài *K. Interlineatus*; loài *M. pulchra* và loài *M. heymonsi* có thành phần thức ăn kém đa dạng.

**Bảng 1. Thành phần thức ăn của một số loài lưỡng cư thuộc họ Nhái bầu (Microhylidae) ở Vườn quốc gia Bến En**

TT	Thành phần thức ăn	Số mẫu thức ăn trong dạ dày				
		KI	KP	MF	MP	MH
	Lớp hình nhện - Arachnida					
	Bộ Nhện - Araneae					
1	Họ Linyphiidae	0	1	0	0	0
2	Họ Corinnidae	1	1	0	0	0
3	Họ Lycosidae	0	1	0	0	0
4	Họ Thomisidae	0	0	0	1	0
5	Họ Salticidae	0	0	0	0	1
	Bộ Chân dài - Opiliones					
6	Họ Protolophidae	0	1	0	0	0
7	Họ Sclerosomatidae	0	2	0	0	0
	Lớp Côn trùng - Insecta					
	Bộ Cánh cứng - Coleoptera					
8	Họ Scarabaeidae	2	3	1	0	0
9	Họ Elateridae	1	1	0	0	0
10	Họ Carabidae	0	4	0	0	0
11	Họ Lampyridae	0	4	0	0	0
12	Họ Coccinellidae		0	1	0	0
	Bộ Cánh màng - Hymenoptera					
13	Họ Formicidae	9	140	140	22	130
	Bộ Cánh nửa - Hemiptera					
14	Họ Pentatomidae	4	0	0	0	0

15	Họ Reduviidae	0	2	0	0	0
	Bộ Cánh đều - Isoptera					
16	Họ Kalotermitidae	10	259	2	4	0
17	Họ Termitidae	17	55	4	0	0
18	Họ Rhinotermitidae	18	33	0	2	0
	Bộ Chấy - Phthiraptera					
19	Chưa định loại	0	0	0	0	1
	Lớp Giáp mềm - Malacostraca					
	Bộ Chân đều - Isopoda					
20	Họ Armadillidae	3	18	2	3	1
21	Chưa định loại	0	0	0	0	1
	Tổng	65	525	149	32	135

Ghi chú: KI (*Kalophrynus interlineatus*); KP (*Kaloula pulchra*); MF (*Microhyla fissipes*); MP (*Microhyla pulchra*); MH (*Microhyla heymonsi*)

### 3.2. Về tính đa dạng các loại thức ăn

Chỉ số đa dạng phản ánh sự khác biệt thành phần thức ăn giữa các loài lưỡng cư thuộc họ nhái bầu. Sự khác biệt này liên quan đến số lượng mẫu thức ăn cũng như các loại thức ăn khác nhau trong dạ dày của chúng. Chỉ số đa dạng Shannon - Weiner ( $H'$ ) của từng loài lưỡng cư được ghi nhận trong bảng 2.

**Bảng 2. Chỉ số đa dạng Shannon - Weiner ( $H'$ ) các họ thức ăn theo loài lưỡng cư của họ Nhái bầu (*Microhylidae*) tại Vườn quốc gia Bến En**

Loài lưỡng cư	Số mẫu thức ăn thu được	Số họ thức ăn	Chỉ số Shannon - Weiner ( $H'$ )
<i>Kalophrynus interlineatus</i>	65	9	1,82
<i>Kaloula pulchra</i>	525	15	1,43
<i>Microhyla fissipes</i>	149	5	0,34
<i>Microhyla pulchra</i>	32	5	1,02
<i>Microhyla heymonsi</i>	135	5	0,22
Tổng số	906		1,41

Theo bảng 2, chỉ số Shannon - Weiner ( $H'$ ) có biên độ giao động tương đối lớn giữa các loài (từ 0,22 đến 1,82). Thành phần thức ăn của các loài *Kalophrynus interlineatus*, *Kaloula pulchra* và *Microhyla pulchra* có sự đa dạng trung bình, trong khi *Microhyla fissipes* và *Microhyla heymonsi* có độ đa dạng yếu. Sự biến động chỉ số  $H'$  không phụ thuộc nhiều vào số lượng mẫu thức ăn mà phụ thuộc rất nhiều vào tần suất xuất hiện của chúng trong các dạ dày. *Kaloula pulchra* có số mẫu và số họ thức ăn cao nhất nhưng chỉ số  $H'$  ( $H' = 1,43$ ) thấp hơn so với *Kalophrynus interlineatus* ( $H' = 1,82$ ) vì tần số xuất hiện của các loại thức ăn của *Kaloula pulchra* thấp hơn *Kalophrynus interlineatus*.

Như vậy, mặc dù tính đa dạng chung về thức ăn của các loài cao với 19 họ, 8 bộ, nhưng đối với các loài riêng biệt thì tính đa dạng thấp và trung bình.

### 3.3. Về các loại thức ăn quan trọng

**Bảng 3. Tần số (F), số lượng (N), thể tích (V, mm<sup>3</sup>), chỉ số quan trọng (Ix) thành phần thức ăn của họ Nhái bầu (Microhylidae) tại Vườn quốc gia Bến En**

TT	Thành phần thức ăn	Tần số		Số lượng		Thể tích		Chỉ số quan trọng I <sub>x</sub>
		F	F (%)	N	N (%)	V	V (%)	
	Lớp hình nhện - Arachnida							
	Bộ Nhện - Araneae							
1	Họ Linyphiidae	1	4,00	1	0,11	3,14	0,58	1,57
2	Họ Corinnidae	1	4,00	1	0,11	6,54	1,22	1,78
3	Họ Lycosidae	1	4,00	1	0,11	3,02	0,56	1,56
4	Họ Thomisidae	1	4,00	1	0,11	2,45	0,46	1,52
5	Họ Salticidae	1	4,00	1	0,11	0,10	0,02	1,38
	Bộ Chân dài - Opiliones							
6	Họ Protolophidae	1	4,00	1	0,11	6,21	1,16	1,76
7	Họ Sclerosomatidae	1	4,00	2	0,22	7,35	1,37	1,86
	Lớp Côn trùng - Insecta							
	Bộ Cánh cứng - Coleoptera							
8	Họ Scarabaeidae	2	8,00	3	0,33	124,83	23,22	10,52
9	Họ Elateridae	1	4,00	1	0,11	45,72	8,51	4,21
10	Họ Carabidae	1	4,00	4	0,44	27,28	5,07	3,17
11	Họ Lampyridae	2	8,00	4	0,44	5,45	1,01	3,15
12	Họ Coccinellidae	2	8,00	5	0,55	1,98	0,37	2,97
	Bộ Cánh màng - Hymenoptera							
13	Họ Formicidae	22	88,00	485	53,53	11,48	2,14	47,89
	Bộ Cánh nửa - Hemiptera							
14	Họ Pentatomidae	1	4,00	4	0,44	55,34	10,29	4,91
15	Họ Reduviidae	2	8,00	2	0,22	101,69	18,92	9,05
	Bộ Cánh đều - Isoptera							
16	Họ Kalotermitidae	8	32,00	265	29,25	34,61	6,44	22,56
17	Họ Termitidae	2	8,00	59	6,51	46,24	8,60	7,70
18	Họ Rhinotermitidae	2	8,00	35	3,86	21,26	3,95	5,27
	Bộ Chấy - Phthiraptera							
19	Chưa định loại	1	4,00	1	0,11	0,47	0,09	1,40
	Lớp Giáp mềm-Malacostraca							
	Bộ Chân đều - Isopoda							
20	Họ Armadillidae	10	40,00	27	2,98	32,36	6,02	16,33
21	Chưa định loại	1	4,00	2	0,22	0,03	0,01	1,41
	Tổng	25		906		537,53		

Về tần số bắt gặp, loại thức ăn có tần số bắt gặp nhiều nhất là Formicidae (với 22 lần bắt gặp, chiếm 88%), tiếp theo là Armadillidae (với 10 lần bắt gặp, chiếm 40%), Kalotermitidae (với 8 lần bắt gặp, chiếm 32%). Số còn lại có tần số bắt gặp ít hơn, dao động từ 1 - 2 lần (chiếm 4 - 8%). Ngoài ra, trong các mẫu dạ dày còn có các mẫu thực vật khô, sỏi đá, có thể do chúng nuốt phải trong quá trình bắt mồi.

Về thể tích, các loại thức ăn của họ Nhái bầu chủ yếu có kích thước nhỏ phù hợp với kích thước của cơ thể. Thể tích thức ăn cao nhất là Scarabaeidae với  $124,83 \text{ mm}^3$  (chiếm 23,22%), thấp nhất là Salticidae với  $0,1 \text{ mm}^3$  (chiếm 0,02%).

Về chỉ số quan trọng, Formicidae có chỉ số quan trọng cao nhất trong thành phần thức ăn của họ Nhái bầu với 47,89%, tiếp theo Kalotermitidae với 22,56%, Armadillidae với 11,33%. Thấp nhất là họ thuộc bộ Chấy rận với 1,4%.

Như vậy, Formicidae, Kalotermitidae và Armadillidae là ba họ có chỉ số quan trọng cao cũng đồng thời có tần số xuất hiện nhiều nhất trong số các dạ dày nghiên cứu. Có thể các loại này có tập tính kiếm ăn theo đàn, có số lượng lớn trong một đàn nên tần số bắt gặp cao và trở thành loại thức ăn quan trọng đối với sự tồn tại của các loài lưỡng cư thuộc họ Nhái bầu.

#### 4. KẾT LUẬN

Thành phần thức ăn của họ Nhái bầu gồm 21 loại thức ăn khác nhau, định loại được 19 họ thuộc 8 bộ của 3 lớp, chủ yếu thuộc lớp côn trùng với 12 họ thuộc 5 bộ. Chỉ số Shannon - Weiner ( $H'$ ) có biên độ giao động từ yếu đến trung bình (từ 0,22 đến 1,82), trong đó thành phần thức ăn của *Kalophrynus interlineatus* có chỉ số đa dạng cao nhất ( $H'=1,82$ ), tiếp đến là *Kaloula pulchra* ( $H'=1,43$ ), thấp nhất là *Microhyla heymonsi* ( $H' = 0.22$ ).

Loại thức ăn được sử dụng nhiều nhất là Formicidae với tần số bắt gặp 22 lần, tiếp theo là Armadillidae với 10 lần bắt gặp, Kalotermitidae với 8 lần bắt gặp.

Thể tích thức ăn cao nhất là Scarabaeidae với  $124,83 \text{ mm}^3$  (chiếm 23,22%), thấp nhất là Salticidae với  $0,1 \text{ mm}^3$  (chiếm 0,02%).

Formicidae có chỉ số quan trọng cao nhất trong thành phần thức ăn của họ Nhái bầu với 47,89%, tiếp theo là Kalotermitidae với 22,56%, Armadillidae với 11,33%. Thấp nhất là họ Salticidae thuộc bộ chấy rận với 1,4%.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] <http://snnptnt.thanhhoa.gov.vn/Default.aspx?portalid=admin&selectpagei>
- [2] Nguyễn Văn Sáng, Hoàng Xuân Quang (2000): Khu hệ bò sát, ếch nhái Vườn quốc gia Bến En (Thanh Hóa), *Tạp chí Sinh học*, Số 22 (15) CĐ, tr: 15-23.
- [3] Bourret R. (1942), Les Batraciens de l'Indochine, *Institut Océanographique de l'Indoch*, Ha Noi.

- [4] Ziegler T. & Köhler J. (2001): Rhacophorus orlovi sp. n., ein neuer Ruderfrosch aus Vietnam (Amphibia: Anura: Rhacophoridae), *Sauria*, 23(3): 37-46.
- [5] Ohler A. (2003), Revision of the genus Ophryophryne Boulenger, 1903 (Megophryidae) with description of two new species, *Alytes*, 2003,21(1-2): pp. 23-44.
- [6] Nguyen V. S., Ho T. C., Nguyen Q. T. (2009): Herpetofauna of Viet Nam, Edition Chimaira, 768 pp.
- [7] Frost, D. R. (2018), Amphibian Species of the World: an Online Reference, Version 6.0 (Date of access), *Electronic Database accessible at*.
- [8] Nauman, I.D. (Chief Editor) (1991), The insects of Australia, *Cornell University Press, Ithaca, New York*: 1137 pp.
- [9] Naumann I. D., et al. (1993a), The insects of Australia: A Textbook for Students and Research Workers, 1<sup>st</sup> Edition, *Australia*, 512pp.
- [10] Naumann et al. (1993b), The insects of Australia: A Textbook for Students and Research Workers, 2<sup>nd</sup> Edition, *Australia*, 795 pp.
- [11] Magnusson W.E., Lima A. P., da Silva W.A. & de Araujo M. C., (2003): Use of geometric forms to estimate volume of invertebrates in ecological studies of dietary overlap. *Copeia*, (1): 13 - 19.
- [12] Ngo C. D., Ngo B. V. & Nguyen T. T. T., 2014: Dietary ecology of the common sun Skink *Eutropis multifasciatus* (Kuhl, 1820) in Thua Thien Hue Province, Vietnam. *Tạp chí Sinh học*, 36 (4): 471- 478.
- [13] Caldart V. M., Iop S., Bertaso T. R. N. & Zanini C., 2012: Feeding ecology of *Crossodactylus schmidti* (Anura: Hylodidae) in southern Brazil. *Zoological Studies*, 51 (4): 484 - 493.
- [14] Phạm Văn Anh, Nguyễn Quảng Trường (2018), Thành phần thức ăn của loàiẾch gai vân nam *Nanorana yunnanensis* (Anderson, 1879) ở tỉnh Sơn La. *Tạp chí Khoa học ĐHQGHN: Khoa học Tự nhiên và Công nghệ*, tập 34, số 3. Tr.1-7.
- [15] Shannon, C. E., and Weaver, W., 1949. The Mathematical Theory of Communication. Urbana: University of Illinois Press.
- [16] Hoàng Xuân Quang, Hoàng Ngọc Thảo, Nguyễn Văn Sáng (2008). Một số nhận xét về khu hệ ếch nhái, bò sát Bắc Trung Bộ. *Tạp chí Sinh học*, 30(4): 41 – 48.
- [17] Sole M., Beckmann O., Pelz B., Kwet A. & Engels W., (2005): Stomach-flushing for diet analysis in anurans: an improved protocol evaluated in a case study in Araucaria forests, southern Brazil. *Studies on Neotropical Fauna and Environment*, 40(1): 23 - 28.



## FOOD SPECTRUM OF SOME AMPHIBIANS OF THE MICROHYLIDAE IN BEN EN NATIONAL PARK, THANH HOA PROVINCE

Trinh Thi Hong, Nguyen Huu Tan, Thieu Thi Huyen

### ABSTRACT

*Based on stomach content analyses of 25 specimens of Microhylydae in Ben En National Park, Thanh Hoa province, we indentified 906 prey items of 21 categories. Food spectrum of Kalophrynus interlineatus has the highest diversity index ( $H' = 1.82$ ). Formicidae is the highest frequency of prey items, found in 22 stomachs. Scarabaeidae have the highest volume of prey items with  $124.83 \text{ mm}^3$  (23.22% of total volume of prey items). Formicidae had the highest important index in the food spectrum of Microhylidae with 47.89%, followed by Kalotermitidae with 22.56%, Armadillidae with 11.33%.*

**Keywords:** *Food spectrum, important index, Microhylydae, Ben En, Thanh Hoa province.*

\* Ngày nộp bài: 23/9/2020; Ngày gửi phản biện: 01/10/2020; Ngày duyệt đăng: 28/10/2020

\* *Lời cảm ơn: Bài báo này là kết quả nghiên cứu từ đề tài cấp cơ sở mã số ĐT-2017-42 của Trường Đại học Hồng Đức. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn TS. Phạm Thị Nhị (Viện Sinh thái và Tài nguyên Sinh vật) đã hỗ trợ định loại mẫu thức ăn, TS. Đậu Quang Vinh (Đại học Hồng Đức) đã hỗ trợ thu mẫu ngoài thực địa và định loại lưỡng cư. Các em sinh viên Bùi Bảo Thịnh, Trần Thị Tuyết Mai, Ngô Văn Tám, Vũ Thị Hồng Hằng lớp K17 - ĐHSP Sinh đã hỗ trợ đi thu mẫu ngoài thực địa và đo đếm mẫu thức ăn trên phòng thí nghiệm.*

# MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA HÀM DẪN XUẤT

Nguyễn Mạnh Hùng<sup>1</sup>

## TÓM TẮT

*Bài báo đưa ra chứng minh cho một số định lý cơ bản về hàm dẫn xuất của đại lượng ngẫu nhiên nhận các giá trị nguyên, không âm.*

**Từ khóa:** Hàm dẫn xuất, đại lượng ngẫu nhiên nguyên, không âm.

### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Chúng ta đều biết: mỗi phân phối xác suất đều được xác định một cách duy nhất bởi một hàm đặc trưng  $\varphi(t) = E(e^{itX})$ . Tuy nhiên việc nghiên cứu các hàm đặc trưng nói chung phức tạp và đòi hỏi vận dụng lý thuyết hàm biến phức.

Đối với các đại lượng ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên, không âm có một cách khác đơn giản hơn để nghiên cứu phân phối xác suất, đó là nghiên cứu thông qua những hàm biến thực dạng đa thức hoặc chuỗi, gọi là các hàm dẫn xuất. Trong bài báo này chúng tôi chứng minh các tính chất cơ bản của hàm dẫn xuất mà trong tài liệu [1] không trình bày hoặc trình bày chưa cụ thể.

### 2. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

**Định nghĩa 2.1.** [1] Cho đại lượng ngẫu nhiên  $X$  nhận các giá trị nguyên, không âm với  $P(X=i) = p_i, (i=0,1,2, \dots)$ . Hàm số  $f(s) = Es^X = \sum_{i=0}^{\infty} p_i s^i$  được gọi là hàm dẫn xuất của đại lượng ngẫu nhiên  $X$ .

**Nhận xét 2.1.** Nếu  $f(s)$  là hdx của đại lượng ngẫu nhiên  $X$  thì  $f(e^{it})$  là hàm đặc trưng của nó.

**Ví dụ 2.1.** Cho đại lượng ngẫu nhiên  $X$  có phân bố xác suất như sau:

$X$	0	1	2	3	4	5
$P$	0,1	0,15	0,25	0,2	0,1	0,2

Theo định nghĩa 1.1, hàm dẫn xuất của  $X$  là

$$f(s) = Es^X = 0,1 + 0,15s + 0,25s^2 + 0,2s^3 + 0,1s^4 + 0,2s^5.$$

**Ví dụ 2.2.** [2] Cho đại lượng ngẫu nhiên  $X$  có phân phối xác suất nhị thức với tham số  $(n, p)$ . Theo định nghĩa 1.1, hàm dẫn xuất của  $X$  là

$$f(s) = Es^X = \sum_{i=0}^n C_n^i p^i q^{n-i} s^i = \sum_{i=0}^n C_n^i (ps)^i q^{n-i}.$$

<sup>1</sup> Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức

Biểu thức cuối cùng chính là khai triển nhị thức Newton  $(ps + q)^n$ .

Vậy hàm dẫn xuất của đại lượng ngẫu nhiên có phân phối nhị thức với tham số  $(n, p)$  là  $f(s) = (ps + q)^n$ .

**Ví dụ 2.3.** Cho đại lượng ngẫu nhiên  $X$  có phân phối xác suất Poisson với tham số  $\lambda > 0$ . Theo định nghĩa 1.1, hàm dẫn xuất của  $X$  là

$$f(s) = Es^X = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} s^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^i e^{-\lambda}}{i!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}.$$

Vậy hàm dẫn xuất của đại lượng ngẫu nhiên có phân phối Poisson với tham số  $\lambda > 0$  là:

$$f(s) = e^{\lambda(s-1)}.$$

**Định nghĩa 2.2.** ([1]) Cho đại lượng ngẫu nhiên  $X$  nhận các giá trị nguyên không âm với  $P(X > i) = q_i, (i = 0, 1, 2, \dots)$ . Hàm số  $g(s) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i s^i$  được gọi là hàm dẫn xuất phụ của đại lượng ngẫu nhiên  $X$ .

**Ví dụ 2.4.** Cho đại lượng ngẫu nhiên  $X$  có phân bố xác suất như sau:

$X$	0	1	2
$P$	0,1	0,5	0,4

$X$	0	1	2
$Q$	0,9	0,4	0

Theo định nghĩa 1.2, hàm dẫn xuất của  $X$  là:  $g(s) = 0,9 + 0,4s$ .

**Ví dụ 2.5.** Cho đại lượng ngẫu nhiên  $X$  có phân phối xác suất Poisson với tham số  $\lambda > 0$ . Theo Định nghĩa 1.2, hàm dẫn xuất của  $X$  là

$$g(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \right) s^i = \dots = \frac{1 - e^{\lambda(s-1)}}{1-s}.$$

Hàm dẫn xuất phụ của đại lượng ngẫu nhiên có phân phối Poisson với tham số  $\lambda > 0$  là

$$g(s) = \frac{1 - e^{\lambda(s-1)}}{1-s}.$$

**Nhận xét 2.2.** a) Hàm dẫn xuất  $f(s)$  xác định ít nhất trên đoạn  $[-1; 1]$ .

b) Hàm dẫn xuất phụ  $g(s)$  xác định ít nhất trên đoạn  $[-1; 1]$ .

c) Chuỗi hàm  $\sum_{i=0}^{\infty} p_i \cdot s^i$  hội tụ đều trên đoạn  $[\alpha; \beta] \subset [-1; 1]$  về hàm  $f(s)$ , do đó

ta có thể lấy đạo hàm 2 vế  $f'(s) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p_i \cdot s^{(i-1)}$ . Thay  $s = 1$  vào công thức trên ta được

$f'(1) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p_i$ . Suy ra  $EX = f'(1)$ . Vậy  $f'(s)$  xác định tại  $s = 1$  khi và chỉ khi  $EX$  tồn tại.

**Định lý 2.1.** [1] Cho  $f(s), g(s)$  lần lượt là hàm dẫn xuất và hàm dẫn xuất phụ của đại lượng ngẫu nhiên  $X$ . Khi đó nếu  $|s| < 1$  thì  $g(s) = \frac{1-f(s)}{1-s}$ .

**Chứng minh.** Ta có  $g(s) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i s^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{k=i+1}^{\infty} p_k \right) s^i$ .

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } g(s) &= (1-p_0) + (1-p_0-p_1)s + (1-p_0-p_1-p_2)s^2 + \dots \\ &= (1+s+s^2+\dots) - p_0(1+s+s^2+\dots) - p_1(s+s^2+\dots) - p_2(s^2+\dots) - \dots \\ &= \left(\frac{1}{1-s}\right) - p_0\left(\frac{1}{1-s}\right) - p_1\left(\frac{s}{1-s}\right) - p_2\left(\frac{s^2}{1-s}\right) - \dots \\ &= \left(\frac{1}{1-s}\right)(1-p_0-p_1s-p_2s^2-\dots) \\ &= \left(\frac{1}{1-s}\right)\left(1-\sum_{i=0}^{\infty} p_i s^i\right) \\ &= \frac{1-f(s)}{1-s}. \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh.

**Định lý 2.2.** [1] Cho  $X$  là đại lượng ngẫu nhiên nhận các giá trị nguyên không âm. Nếu  $EX$  tồn tại thì  $g(s)$  xác định tại  $s=1$  và  $EX = g(1)$ .

**Chứng minh.** Nếu  $EX$  tồn tại, dễ thấy

$$\text{Do đó } EX = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{f(s) - f(1)}{s - 1} = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{f(s) - 1}{s - 1} = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1 - f(s)}{1 - s}$$

Từ định lý 2.1 suy ra:  $EX = \lim_{s \rightarrow 1} g(s) = g(1)$ .

Định lý được chứng minh.

**Định lý 2.3.** [1]) Cho  $X$  là đại lượng ngẫu nhiên nhận các giá trị nguyên không âm. Nếu  $DX$  tồn tại thì  $f'(s), g'(s)$  xác định tại  $s=1$  và

$$DX = f''(1) + f'(1) - (f'(1))^2 = 2g'(1) + g(1) - (g(1))^2.$$

**Chứng minh.** Ta có

$$\begin{aligned} DX &= E(X - EX)^2 \\ &= EX^2 - 2E(X \cdot EX) + (EX)^2 \quad (\text{Xem [1]}) \\ &= EX^2 - (EX)^2 \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot p_i - (f'(1))^2 \quad (\text{xem Định lý 2.2}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) \cdot p_i + \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p_i - (f'(1))^2$$

$$= f''(1) + f'(1) - (f'(1))^2.$$

(Do  $DX$  tồn tại nên  $f'(1)$  tồn tại hay  $f'(s)$  xác định tại  $s=1$ ).

Tiếp theo, từ Định lý 2.1 ta có  $g(s) = \frac{1-f(s)}{1-s}$ .

Suy ra:  $f(s) = 1 - g(s) + s \cdot g(s)$

$$f'(s) = -g'(s) + g(s) + s \cdot g'(s)$$

$$f''(s) = -g''(s) + 2g'(s) + s \cdot g''(s).$$

Do  $f''(s)$  xác định tại  $s=1$  nên  $f''(1) = 2g'(1)$ , do đó  $g'(s)$  xác định tại  $s=1$  và ta có:

$$DX = f''(1) + f'(1) - (f'(1))^2$$

$$= 2g'(1) + g(1) - (g(1))^2.$$

Vậy  $DX = f''(1) + f'(1) - (f'(1))^2 = 2g'(1) + g(1) - (g(1))^2$ .

Định lý được chứng minh.

**Định lý 2.4.** [1] Cho  $X, Y$  là hai đại lượng ngẫu nhiên độc lập nhận các giá trị nguyên không âm với  $P(X=i) = p_i$  và  $P(Y=i) = q_i$ . Đặt  $Z = X + Y$  thì hàm dẫn xuất của đại lượng ngẫu nhiên  $Z$  là  $f_Z(s) = f_X(s) \cdot f_Y(s)$ , (với  $f_X(s), f_Y(s)$  lần lượt là hai hàm dẫn xuất của hai đại lượng ngẫu nhiên  $X, Y$ ).

**Chứng minh**

Ta có  $f_Z(s) = f_{X+Y}(s) = E s^{(X+Y)}$ .

Suy ra  $f_Z(s) = E(s^X \cdot s^Y)$ .

Nên  $f_Z(s) = E(s^X) \cdot E(s^Y)$  (vì  $X, Y$  là hai đại lượng ngẫu nhiên độc lập, xem [2])

Do đó  $f_Z(s) = f_X(s) \cdot f_Y(s)$ .

Định lý được chứng minh.

**Định lý 2.5.** [1] Nếu  $X_1, X_2, \dots, X_n$  là  $n$  đại lượng ngẫu nhiên độc lập nhận các giá trị nguyên không âm và  $X = \sum_{i=1}^n X_i$  thì hàm dẫn xuất của đại lượng ngẫu nhiên

$X$  là  $f_X(s) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(s)$ , (với  $f_{X_i}(s)$  là hàm dẫn xuất của hai đại lượng ngẫu nhiên  $X_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ).

Định lý 2.5 là mở rộng đơn giản Định lý 2.4, do đó việc chứng minh Định lý 2.5 hoàn toàn dựa trên chứng minh của Định lý 2.4.

Vậy hàm dẫn xuất của tổng các đại lượng ngẫu nhiên độc lập bằng tích các hàm dẫn xuất của từng đại lượng ngẫu nhiên thành phần.

**Hệ quả 2.1.** Nếu  $X_1, X_2, \dots, X_n$  là  $n$  đại lượng ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối xác suất thì hàm dẫn xuất của  $X = \sum_{i=1}^n X_i$  (tổng các đại lượng ngẫu nhiên đó) là  $f_X(s) = (f(s))^n$ , với  $f(s)$  là hàm dẫn xuất chung của các đại lượng ngẫu nhiên  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Feller W. (1957), *An Introduction to Variational the probability theory and its applications*, V. I. 2nd ed. John Wiley and Sons, Inc., New York; Chapman and Hall, Ltd., London.
- [2] Phạm Văn Kiều (2000), *Xác suất thống kê*, Nxb. Giáo dục, Hà Nội.
- [3] Kagan A. M., Linnik Yu. V., Rao R. (1972), *Các bài toán đặc trưng của thống kê toán học (Tiếng Nga)*, Moskva, “Nauka”.

#### SOME BASIC PROPETIES FOR GENERATING FUNCTION

Nguyen Manh Hung

#### ABSTRACT

*In this paper, we present proofs of some basic results for generating function of random variables receiving integer and non-negative values.*

**Keywords:** *Generating function, random variable receiving integer, non-negative values.*

\* Ngày nộp bài: 15/10/2019; Ngày gửi phản biện: 25/11/2019; Ngày duyệt đăng: 28/10/2020

# CHỈ SỐ CHÍNH QUY CASTELNOUVO-MUMFORD CỦA IDEAN CẠNH VÀ KÍCH THƯỚC NHỎ NHẤT CỦA GHÉP CẶP CỰC ĐẠI CỦA ĐỒ THỊ ĐƠN

Lê Quang Huy<sup>1</sup>

## TÓM TẮT

*Bài báo trình bày chứng minh chi tiết về chặn trên của chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của ideal cạnh với đồ thị đơn  $G$  cho trước theo kích thước nhỏ nhất ứng với ghép cặp cực đại của  $G$ .*

**Từ khóa:** *Chỉ số chính quy, ideal cạnh, ghép cặp, đồ thị đơn.*

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Cho  $G$  là một đồ thị đơn và ideal  $I(G) = (x_i x_j \mid \{x_i, x_j\} \in E(G))$  gọi là ideal cạnh của  $G$ . Như vậy với mỗi đồ thị đơn  $G$  ta luôn xác định được một ideal đơn thức tương ứng. Việc đánh giá mối liên hệ và sự tương tác giữa  $G$  và  $I(G)$  như thế nào là vấn đề được nhiều người quan tâm. Có hai hướng thông dụng tiếp cận về vấn đề này là cấu trúc của đồ thị  $G$  ảnh hưởng như thế nào đến tính chất của ideal  $I(G)$  và các bất biến của đồ thị  $G$  có tác động như thế nào đến các bất biến của ideal  $I(G)$ . Trong bài báo này, tác giả tiếp cận theo hướng thứ hai về chặn trên bất biến chỉ số chính quy của ideal  $I(G)$  ứng với đồ thị  $G$  là kích thước nhỏ nhất của ghép cặp cực đại trong đồ thị  $G$ .

Bài báo và trình bày chi tiết các chứng minh cho chặn trên chỉ số chính quy của  $I(G)$  theo kích thước nhỏ nhất của ghép cặp cực đại trong đồ thị  $G$ . Các kết quả này được trình bày sơ lược trong [4,5] dưới dạng nhận xét và gợi ý.

Ngoài phần giới thiệu, bài báo chia thành hai mục. Mục 2 giới thiệu một số kiến thức cơ bản về đồ thị, ideal cạnh, chỉ số chính quy. Mục 3 đưa ra các kết quả chính về chặn trên chỉ số chính quy của  $I(G)$  theo kích thước nhỏ nhất của ghép cặp cực đại của đồ thị  $G$ , trong các trường hợp  $G$  là đồ thị hình sao (Định lý 3.5),  $G$  là đồ thị chứa một cạnh là ghép cặp cực đại kích thước 1 của  $G$  (Định lý 3.8) và cuối cùng là đồ thị  $G$  tổng quát (Định lý 3.9).

## 2. IDEAN CẠNH CỦA ĐỒ THỊ

Trong mục này, chúng ta luôn giả thiết  $R = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  là vành đa thức  $n$  biến  $x_1, x_2, \dots, x_n$  trên trường  $K$  vô hạn,  $m$  là ideal thuần nhất cực đại của  $R$  và  $A$  là môđun phân bậc hữu hạn sinh trên  $R$ . Các kiến thức cơ bản được trình bày trong [1,2] và các kiến thức cơ bản về đồ thị được trình bày trong [3,4,5].

<sup>1</sup> Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức

**Định nghĩa 2.1** [1, Section 1] Chỉ số chính quy Casteluvno-Mumford (chính quy) của  $A$  là số

$$\text{reg}(A) := \max \{a_i(A) + i \mid i \geq 0\},$$

Trong đó: 
$$a_i(A) = \begin{cases} \max \{n \mid H_m^i(A)_n \neq 0\} & \text{khi } H_m^i(A) \neq 0, \\ -\infty & \text{khi } H_m^i(A) = 0. \end{cases}$$

Với cách tiếp cận sử dụng dãy tự do tối tiểu, chỉ số chính quy được xây dựng như sau:

**Định nghĩa 2.2.** [1, Proposition 1.1 và Theorem 1.2] Cho dãy tự do tối tiểu của  $E$  được xác định như sau:  $0 \rightarrow \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} R(-j)^{\beta_{pj}(A)} \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} R(-j)^{\beta_{0j}(A)} \rightarrow A \rightarrow 0$ .

Khi đó chỉ số chính quy được xác định là:  $\text{reg}(A) := \max \{j - i \mid \beta_{ij}(A) \neq 0\}$ .

Từ định nghĩa thứ hai của chỉ số chính quy ta nhận được các kết quả sau:

**Bổ đề 2.3.** [2] Cho  $I$  là ideal thuần nhất của  $R$ , khi đó ta có:  $\text{reg}(R/I) = \text{reg}(I) - 1$ .

**Bổ đề 2.4.** [2] Cho  $u$  là phần tử thuần nhất bậc  $d$  của  $R$ , khi đó

i)  $\text{reg}(R/(u)) = d - 1$ .

ii)  $\text{reg}((u)) = d$ .

**Bổ đề 2.5.** [1, Corollary 20.19] Cho dãy khớp:  $0 \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$  các  $R$ -môđun hữu hạn sinh của các đồng cấu thuần nhất. Khi đó

i)  $\text{reg}(M) \leq \max \{\text{reg}(P), \text{reg}(N)\}$ .

ii)  $\text{reg}(N) \leq \max \{\text{reg}(P) - 1, \text{reg}(M)\}$ .

Từ dãy khớp  $0 \rightarrow M \rightarrow M \oplus N \rightarrow N \rightarrow 0$ , kết hợp với kết quả i) trong bổ đề trên ta nhận được kết quả sau:

**Hệ quả 2.6.** Cho  $M, N$  là các  $R$ -môđun phân bậc hữu hạn sinh. Khi đó, ta có

$$\text{reg}(M \oplus N) \leq \max \{\text{reg}(M), \text{reg}(N)\}.$$

**Định nghĩa 2.7.** [3,4,5] Đồ thị đơn hữu hạn  $G$  là một cặp  $(V(G), E(G)) = (V, E)$ , trong đó  $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  gọi là tập đỉnh và  $E$  là tập cạnh bao gồm các tập con có 2 phần tử của  $V$  có dạng  $\{x_i, x_j\} (i \neq j)$ .

Đồ thị  $G' = (V(G'), E(G'))$  gọi là đồ thị con cảm sinh của  $G$  nếu  $V(G') \subset V(G)$  và  $E(G') \subset E(G)$ .

Trong bài báo này, ta luôn giả sử đồ thị  $G$  là đồ thị đơn.

**Định nghĩa 2.8.** [3,4,5] Cho đồ thị  $G = (V, E)$ .

i)  $x_i$  gọi là một đỉnh cô lập của  $G$  nếu nó không thuộc bất kì cạnh nào của  $G$ .



ii) Cho  $F = \{G_1, G_2, \dots, G_s\}$  là một họ các đồ thị con của  $G$ .  $F$  gọi là một phủ cạnh của  $G$  nếu  $\bigcup_{i=1}^s E(G_i) = E(G)$ .

iii) Một ghép cặp  $M$  của đồ thị  $G$  là một đồ thị con của  $G$  sao cho  $E(M) \subset E(G)$  và mọi cặp cạnh của  $M$  đôi một rời nhau. Kích thước của một ghép cặp  $M$  được kí hiệu bởi  $m(M)$  là số cạnh của  $M$ .

Một ghép cặp  $M$  gọi là cực đại nếu không thể bổ sung thêm cạnh khác của đồ thị  $G$  để tạo thành một ghép cạnh mới của  $G$ .

Kích thước nhỏ nhất của ghép cặp cực đại của đồ thị  $G$  được kí hiệu là  $\beta(G) = \min \{m(M) \mid M \text{ là ghép cặp cực đại của đồ thị } G\}$ .

**Định nghĩa 2.9.** [4,5] Cho đồ thị  $G = (V, E)$ . Gọi  $e$  là một cạnh của  $G$ .

i)  $N(e) = \{x \in V \mid \exists y \in e \text{ sao cho } \{x, y\} \in E(G)\}$  gọi là lân cận mở (gọi tắt là lân cận) của  $e$ .

ii)  $N[e] = N(e) \cup \{e\}$  gọi là lân cận đóng của  $e$ .

**Định nghĩa 2.10.** [4,5] Cho đồ thị  $G = (V, E)$ . Gọi  $e$  là một cạnh của  $G$ .

i)  $G \setminus e$  là đồ thị nhận được từ  $G$  bằng cách xoá đi cạnh  $e$ , nghĩa là  $G \setminus e = (V(G), E(G \setminus e) = E(G) \setminus \{e\})$ .

ii)  $G_e$  là đồ thị con của  $G$  có tập đỉnh là  $V(G_e) = G \setminus N[e]$ .

**Định nghĩa 2.11.** [3,4,5] Cho đồ thị  $G$ ,  $I(G) = (x_i x_j \mid \{x_i, x_j\} \in E(G))$  gọi là idêan cạnh của đồ thị  $G$ .

Kí hiệu  $\text{reg}(G) := \text{reg}(I(G))$ .

**Bổ đề 2.12.** [4, Theorem 3.5] Cho đồ thị  $G$  và  $e$  là một cạnh của  $G$ . Khi đó ta có  $\text{reg}(G) \leq \max \{2, \text{reg}(G \setminus e), \text{reg}(G_e) + 1\}$ .

**Chứng minh**

Giả sử  $e = \{x_i x_j\}$ . Xét dãy khớp

$$0 \rightarrow \frac{R}{(x_i x_j) \cap I(G \setminus e)} \rightarrow \frac{R}{(x_i x_j)} \oplus \frac{R}{I(G \setminus e)} \rightarrow \frac{R}{(x_i x_j) + I(G \setminus e)} \rightarrow 0.$$

Ta có  $(x_i x_j) + I(G \setminus e) = I(G)$  và từ Hệ quả 2.6 ta nhận được

$$\text{reg} \left( \frac{R}{(x_i x_j)} \oplus \frac{R}{I(G \setminus e)} \right) \leq \max \left\{ \text{reg} \left( \frac{R}{(x_i x_j)} \right), \text{reg} \left( \frac{R}{I(G \setminus e)} \right) \right\}.$$

Kết hợp với Bổ đề 2.3 và Bổ đề 2.5 ii) ta có

$$\text{reg} \left( \frac{R}{I(G)} \right) \leq \max \left\{ \text{reg} \left( \frac{R}{(x_i x_j) \cap I(G \setminus e)} \right) - 1, \text{reg} \left( \frac{R}{(x_i x_j)} \right), \text{reg} \left( \frac{R}{I(G \setminus e)} \right) \right\}$$

Ta có :  $(x_i x_j) \cap I(G \setminus e) = x_i x_j (y \mid y \in N(e) + I(G_e))$ .

Suy ra :  $\text{reg} \left( \frac{R}{(x_i x_j) \cap I(G \setminus e)} \right) = \text{reg} \left( \frac{R}{I(G_e)} \right) + 2$ .

Do đó, ta có :  $\text{reg} \left( \frac{R}{I(G)} \right) \leq \max \left\{ \text{reg} \left( \frac{R}{I(G_e)} \right) + 2, \text{reg} \left( \frac{R}{(x_i x_j)} \right), \text{reg} \left( \frac{R}{I(G \setminus e)} \right) \right\}$ .

Vậy :  $\text{reg}(G) \leq \max \{ 2, \text{reg}(G \setminus e), \text{reg}(G_e) + 1 \}$ .

**Bổ đề 2.13.** [4, Corollary 3.7] hoặc [6, Theorem 2]) Giả sử  $G$  và  $G_1, G_2, \dots, G_s$  là các đồ thị đơn trên cùng tập đỉnh  $V$  sao cho  $E(G) = \bigcup_{i=1}^s E(G_i)$ . Khi đó ta có :

$$\text{reg}(R/I(G)) \leq \sum_{i=1}^s \text{reg}(R/I(G_i)).$$

### 3. CHỈ SỐ CHÍNH QUY CỦA IDEAN CẠNH

Bài toán chặn trên chỉ số chính quy theo kích thước nhỏ nhất của ghép cặp cực đại trong  $G$  lần lượt được chứng minh cho các lớp đồ thị hình sao, đồ thị chứa ít nhất một ghép cặp cực đại có kích thước 1 và từ đó ta có thể khái quát hoá chứng minh cho trường hợp đồ thị  $G$  tổng quát (Xem [4] và [5]).

Trước hết ta cần đến khái niệm đồ thị rút gọn.

**Định nghĩa 3.1.** Cho  $G$  là đồ thị. Đồ thị nhận được từ  $G$  bằng cách bỏ đi tập điểm cô lập của  $G$  gọi là đồ thị rút gọn của  $G$ . Kí hiệu  $G^{\text{red}}$ .

**Bổ đề 3.2.** Cho đồ thị  $G$ . Ta có  $\text{reg}(G) = \text{reg}(G^{\text{red}})$ .

Do đó, trong mục này không mất tính tổng quát, ta luôn giả sử đồ thị  $G$  không có điểm cô lập

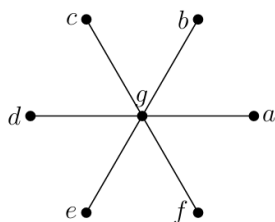
**Bổ đề 3.3.** Cho đồ thị  $G$  có duy nhất một cạnh. Khi đó  $\text{reg}(G) = 2$ .

#### Chứng minh

Giả sử  $G$  có cạnh  $e = \{x_1, x_2\}$ . Khi đó  $G = (\{x_1, x_2\}, \{e\})$ . Suy ra  $I(G) = (x_1 x_2)$ .

Áp dụng: Bổ đề 2.4 ii), ta nhận được  $\text{reg}(G) = 2$ .

**Định nghĩa 3.4.** Đồ thị  $G$  có tất cả các cạnh chung một đỉnh gọi là đồ thị hình sao.



Hình 1. Đồ thị hình sao 6 cạnh

**Định lý 3.5.** Cho  $G$  là đồ thị hình sao. Khi đó  $\text{reg}(G) \leq 2$ .

**Chứng minh**

Ta chứng minh quy nạp theo số cạnh của  $G$ . Giả sử  $G$  có  $m$  cạnh.

Với  $m = 1$ , theo Bổ đề 3.3, ta có  $\text{reg}(G) = 2$ .

Giả sử đúng đến  $m-1$  cạnh, ta cần chứng minh đúng đến  $m$  cạnh.

Theo Bổ đề 2.12,  $\text{reg}(G) \leq \max \{2, \text{reg}(G \setminus e), \text{reg}(G_e) + 1\}$ .

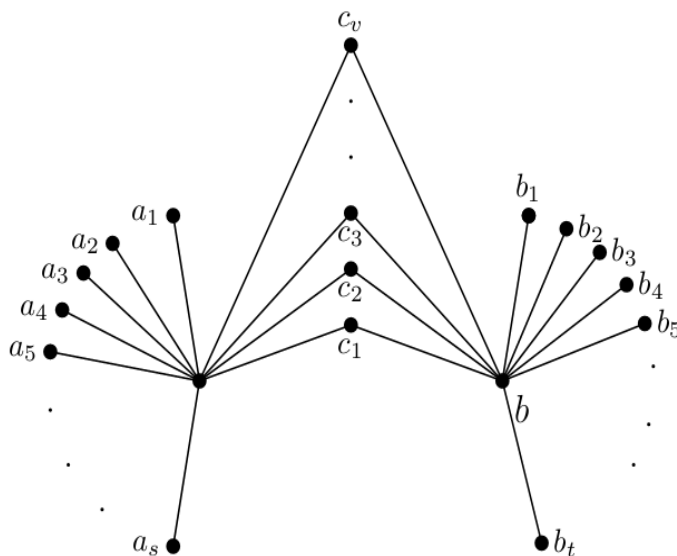
Từ giả thiết quy nạp, ta nhận được  $\text{reg}(G \setminus e) \leq 2$ .

Mặt khác, vì  $G_e$  là đồ thị rỗng, nên  $\text{reg}(G_e) = 0$ .

Vậy  $\text{reg}(G) \leq \max \{2, 2, 1\} = 2$ .

Đồ thị hình sao là đồ thị có các cạnh đều là các ghép cặp cực đại có kích thước 1. Trong phần tiếp theo, ta quan tâm đến đồ thị tổng quát hơn so với đồ thị hình sao, đồ thị chứa ít nhất một cạnh là ghép cặp cực đại có kích thước 1.

**Mệnh đề 3.6.** Giả sử cạnh  $e = \{a, b\}$  là một ghép cặp cực đại có kích thước 1 của đồ thị  $G$ . Khi đó, các cạnh của đồ thị  $G$  luôn chứa đỉnh  $a$  hoặc đỉnh  $b$ , nghĩa là  $G$  có dạng



**Hình 2.**

**Chứng minh**

Giả sử  $G$  có cạnh  $e'$  không chứa đỉnh  $a$  hoặc đỉnh  $b$ , khi đó  $\{e, e'\}$  lập thành một ghép cặp mới có kích thước 2, mâu thuẫn với  $\{e\}$  là ghép cặp cực đại của  $G$ .

**Định lý 3.7.** Cho đồ thị  $G$ . Giả sử cạnh  $e = \{a, b\}$  là một ghép cặp cực đại có độ lớn 1 của đồ thị  $G$ . Khi đó  $\text{reg}(G) \leq 2$ .

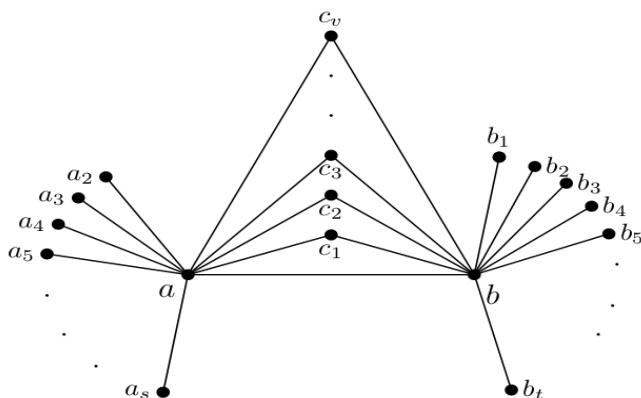
**Chứng minh**

Ta quy nạp theo số cạnh của tập cạnh  $E(G) \setminus \{e\}$ .

Giả sử  $G$  có một cạnh, khi đó theo Bổ đề 3.3 ta có  $\text{reg}(G) \leq 2$ .

Giả sử  $G$  có nhiều hơn một cạnh khi đó đồ thị có dạng như Hình 2. Ta chia tập cạnh của  $G$  thành hai phần  $E(G) = E_1 \cup E_2$ , trong đó,  $E_1$  là tập cạnh mà mỗi cạnh chứa đỉnh  $a$  và  $E_2$  là tập cạnh mà mỗi cạnh chứa đỉnh  $b$ .

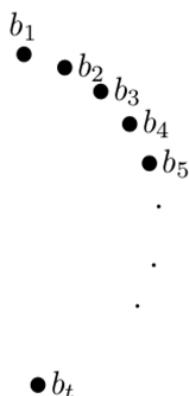
Gọi  $u$  là một cạnh của  $G$ . Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử  $u$  thuộc tập cạnh  $E_1$  và  $u = \{a, a_1\}$ . Khi đó  $G \setminus u$  có dạng như sau:



**Hình 3.**

Theo giả thiết quy nạp ta có  $\text{reg}(G \setminus u) \leq 2$ .

Đồ thị  $G_u$  là đồ thị chỉ gồm các đỉnh độc lập như sau



**Hình 4.**

Áp dụng Bổ đề 3.2 ta có  $\text{reg}(G_e) = 0$ .

Theo Bổ đề 2.12, ta có

$$\text{reg}(G) \leq \max \{2, \text{reg}(G \setminus u), \text{reg}(G_u) + 1\} = 2.$$

Vậy định lý được chứng minh xong.

Vận dụng các kết quả trên, ta chứng minh được kết quả chính của bài báo như sau:

**Định lý 3.8.** Giả sử  $G$  là một đồ thị đơn. Khi đó ta có  $\text{reg}(G) \leq \beta(G) + 1$ .

**Chứng minh**

Đặt  $\beta := \beta(G)$ . Giả sử  $\{e_1, e_2, \dots, e_\beta\}$  là một ghép cặp cực đại của  $G$ . Gọi  $G_i$  là đồ thị con cảm sinh của  $G$ , trong đó các cạnh của  $G_i$  gồm  $e_i$  và các cạnh của  $G$  có đỉnh là đỉnh thuộc cạnh  $e_i$ . Khi đó ta có  $\bigcup_{i=1}^{\beta} E(G_i) = E(G)$ . Áp dụng Bổ đề 2.13, ta có

$$\text{reg}(\mathbf{R}/\mathbf{I}(G)) \leq \sum_{i=1}^{\beta} \text{reg}(\mathbf{R}/\mathbf{I}(G_i)).$$

Theo Định lý 3.7, ta có  $\text{reg}(G_i) \leq 2$ , kết hợp với Bổ đề 2.3 suy ra  $\text{reg}(\mathbf{R}/\mathbf{I}(G_i)) \leq 1$ . Do vậy

$$\text{reg}(\mathbf{R}/\mathbf{I}(G)) \leq \sum_{i=1}^{\beta} \text{reg}(\mathbf{R}/\mathbf{I}(G_i)) \leq \beta.$$

Áp dụng Bổ đề 2.3, ta nhận được  $\text{reg}(G) \leq \beta(G) + 1$ .

4. KẾT LUẬN

Bài toán chặn trên chỉ số chính quy theo kích thước nhỏ nhất của ghép cặp cực đại trong  $G$  lần lượt được chứng minh cho các lớp đồ thị hình sao, đồ thị chứa ít nhất một ghép cặp cực đại có kích thước 1 và từ đó ta có thể khái quát hoá chứng minh cho trường hợp đồ thị  $G$  tổng quát.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] D. Eisenbud (1995), *Commutative Algebra with a View toward Algebraic Geometry*, Springer-Verlag.  
 [2] D. Eisenbud), S. Goto (1984), Linear free resolutions and minimal multi-plexity, *J. Algebra*, 88, 89-133.  
 [3] Herzog, Jürgen, Hibi, Takayuki (2011), *Monomial ideals*, Springer Press, New York.  
 [4] H.H. Tai (2014), *Connections Between Algebra, Combinatorics, and Geometry*, Springer Press, New York, 76, 251-276.  
 [5] R. Woodroffe (2014), Matchings, Coverings, and Castelnuovo-Mumford regularity, *Journal of Commutative Algebra*, 6 (2), 287-303.

**CASTELNOUVEO-MUMFORD REGULARITY OF EDGE IDEAL  
AND THE MINIMUM SIZE OF A MAXIMAL MATCHING  
OF SIMPLE GRAPHS**

**Le Quang Huy**

**ABSTRACT**

*This paper gives a detail proof of the upper bound of regularity of edge ideal of simple graphs in term of the minimum size of a maximal matching of simple graphs.*

**Key words:** *Regularity, edge ideal, matching, simple graph.*

\* Ngày nộp bài: 7/10/2020; Ngày gửi phản biện: 21/10/2020; Ngày duyệt đăng: 28/10/2020

\* Bài báo này là kết quả nghiên cứu từ đề tài cấp cơ sở mã số ĐT-2019- của Trường Đại học Hồng Đức.

# NỬA NHÓM LIÊN TỤC ĐỀU TRONG KHÔNG GIAN BANACH XÁC SUẤT

Lê Thị Oanh<sup>1</sup>

TÓM TẮT

*Trong bài báo này, chúng tôi xin giới thiệu khái niệm nửa nhóm liên tục đều trong không gian Banach xác suất và chứng minh tính chất đặc trưng của toán tử sinh của nửa nhóm liên tục đều.*

**Từ khóa:** Không gian Banach xác suất, toán tử ngẫu nhiên, nửa nhóm liên tục đều, toán tử sinh.

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Lý thuyết toán tử ngẫu nhiên không chỉ là mở rộng ngẫu nhiên của lý thuyết toán tử tất định mà nó còn có nhiều áp dụng quan trọng trong các lĩnh vực khác nhau như phương trình tiến hóa ngẫu nhiên, điểm bất động... lý thuyết toán tử ngẫu nhiên được nghiên cứu theo nhiều hướng khác nhau [1-5]. Gần đây trong tài liệu số [1-4,6] các tác giả đã đưa ra khái niệm nửa nhóm ngẫu nhiên liên tục mạnh trong không gian Banach xác suất và chứng minh một số tính chất của nó. Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu khái niệm nửa nhóm liên tục đều trong không gian Banach xác suất và chứng minh các tính chất đặc trưng của nó.

## 2. NỘI DUNG

### 2.1. Toán tử ngẫu nhiên trên không gian Banach xác suất

Giả sử  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  là không gian xác suất đầy đủ, ký hiệu  $L_0(\Omega)$  là không gian các biến ngẫu nhiên thực. Trong bài báo này, sự hội tụ trong  $L_0(\Omega)$  là hội tụ theo xác suất. Nếu dãy  $(u_n) \in L_0(\Omega)$  hội tụ tới  $u$  trong  $L_0(\Omega)$  thì ta viết  $\lim_n u_n = u$ . Với  $\xi_1, \xi_2 \in L_0(\Omega)$  thỏa mãn  $\xi_1(\omega) \geq \xi_2(\omega)$  hầu chắc chắn khi đó ta viết  $\xi_1 \geq \xi_2$ . Ký hiệu  $L_0^+(\Omega) = \{\xi \in L_0(\Omega): \xi \geq 0\}$ .

**Định nghĩa 1.** [6]. Một cặp  $(X, \|\cdot\|)$  được gọi là một không gian định chuẩn xác suất nếu  $X$  là modul trái trên đại số  $L_0(\Omega)$  và  $\|\cdot\|$  là ánh xạ từ  $X$  đến  $L_0^+(\Omega)$  sao cho các tính chất sau là thỏa mãn

1.  $\|u\| = 0$  khi và chỉ khi  $u = \theta$  với  $\theta$  là phần tử không của  $X$ .
2.  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  với  $u, v \in X$ .
3.  $\|\xi u\| = |\xi| \|u\|$  với  $\xi \in L_0(\Omega)$  và  $u \in X$ .

Ánh xạ  $\|\cdot\|: X \rightarrow L_0^+(\Omega)$  gọi là chuẩn ngẫu nhiên trên  $X$ .

<sup>1</sup> Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức

**Định nghĩa 2.** Giả sử  $X$  là một không gian định chuẩn xác suất.

1. Một dãy  $(u_n) \subset X$  là hội tụ tới  $u \in X$  nếu  $\|u_n - u\|$  hội tụ đến 0 trong  $L_0(\Omega)$ .
2. Một dãy  $(u_n) \subset X$  là dãy Cauchy nếu  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} P(\|u_n - u_m\| > \varepsilon) = 0$  với mỗi  $\varepsilon > 0$ .
3.  $X$  được gọi là không gian Banach xác suất nếu mọi dãy Cauchy  $(u_n) \subset X$  là hội tụ.

**Định nghĩa 3.** [4]. Giả sử  $X$  là một không gian định chuẩn xác suất.

1. Ánh xạ  $\Phi: D(\Phi) \rightarrow X$  được gọi là toán tử ngẫu nhiên nếu miền xác định  $D(\Phi)$  là một không gian định chuẩn xác suất và với  $u_1, u_2 \in D(\Phi)$  và  $\xi_1, \xi_2 \in L_0(\Omega)$ , ta có:

$$\Phi(\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2) = \xi_1 \Phi(u_1) + \xi_2 \Phi(u_2).$$

Một toán tử ngẫu nhiên  $\Phi: X \rightarrow X$  được gọi là toán tử ngẫu nhiên trên  $X$ .

2. Một toán tử ngẫu nhiên  $\Phi: D(\Phi) \rightarrow X$  được gọi là chặn theo xác suất nếu  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{u \in B} P\{\|\Phi u\| > t\} = 0$ , với  $B = \{u \in D(\Phi): \|u\| \leq 1\}$  là hình cầu đơn vị của  $D(\Phi)$ .

3. Một toán tử ngẫu nhiên  $\Phi: D(\Phi) \rightarrow X$  được gọi là bị chặn hầu chắc chắn (viết tắt: a.s) nếu tồn tại biến ngẫu nhiên  $\xi \in L_0^+(\Omega)$  sao cho  $\|\Phi u\| \leq \xi \|u\|$  với  $u \in D(\Phi)$ .

4. Một toán tử ngẫu nhiên  $\Phi: D(\Phi) \rightarrow X$  được gọi là đóng nếu mỗi dãy  $(u_n) \subset D(\Phi)$  sao cho  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi u_n = g$ , thì  $g = \Phi u$ .

5. Một toán tử ngẫu nhiên  $\Phi: D(\Phi) \rightarrow X$  được gọi là liên tục nếu mỗi dãy  $(u_n) \subset D(\Phi)$  sao cho  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \in D(\Phi)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi u_n = \Phi u$ .

**Định lý 1.** [4]. Giả sử  $X$  là một không gian Banach xác suất và giả sử ta có  $\Phi: D(\Phi) \rightarrow X$

là một toán tử ngẫu nhiên. Các mệnh đề sau là tương đương:

- (i)  $\Phi$  là bị chặn a.s.
- (ii)  $\Phi$  là bị chặn theo xác suất.
- (iii)  $\Phi$  là liên tục.

## 2.2. Nửa nhóm liên tục đều của các toán tử ngẫu nhiên

**Định nghĩa 4.** [4]. Cho  $X$  là không gian Banach xác suất và  $\{T(t)\}_{t \in [0, +\infty)}$  là họ các toán tử ngẫu nhiên trong không gian Banach xác suất  $X$ . Khi đó  $\{T(t)\}$  được gọi là nửa nhóm trên  $X$  nếu:



1.  $T(0) = I$ .
2.  $T(s+t) = T(s)T(t) \quad \forall t, s \geq 0$ .
3. Nửa nhóm  $\{T(t)\}$  được gọi là liên tục mạnh nếu  $u \in X$  thì ánh xạ:  $t \rightarrow T(t)u$  từ  $[0, +\infty)$  vào  $X$  là liên tục.
4. Nửa nhóm  $\{T(t)\}_{t \in [0, +\infty)}$  được gọi là bị chặn nếu  $\exists L > 0$  và một biến ngẫu nhiên  $\xi_L \in L_0^+(\Omega)$  phụ thuộc  $L$  sao cho  $\|T(t)u\| \leq \xi_L \|u\|, \quad \forall u \in X$ .

**Định nghĩa 5.** [3]. Cho  $\{T(t)\}$  là một nửa nhóm liên tục mạnh trong không gian  $X$ . Ta định nghĩa:

$$D(A) = \left\{ u \in X : \exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)u - u}{t} \right\} \quad \text{và} \quad Au = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)u - u}{t}$$

Thì ánh xạ  $A : D(A) \rightarrow X$  được gọi là toán tử sinh của nửa nhóm  $\{T(t)\}$ .

**Định nghĩa 6.** Một nửa nhóm  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  được gọi là nửa nhóm liên tục đều nếu:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t+h) - T(t)\| = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

*Nhận xét:* Một nửa nhóm liên tục đều là nửa nhóm liên tục mạnh.

**Định lý 2.** Nửa nhóm liên tục đều khi và chỉ khi  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0$ .

*Chứng minh*

Điều kiện cần. Cho  $T(t)$  là một nửa nhóm liên tục đều, hiển nhiên ta có:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$

Điều kiện đủ. Cho  $T(t)$  là nửa nhóm thỏa mãn  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0$  ta sẽ chỉ ra  $T(t)$  là nửa nhóm liên tục đều.

Thật vậy, với  $h \geq 0$  ta có:

$$\|T(t+h) - T(t)\| = \|T(t)(T(h) - I)\| \leq \|T(t)\| \|T(h) - I\| \leq \xi_t \|T(h) - I\| \xrightarrow{p} 0$$

$$\|T(t+h) - T(t)\| = \|T(t+h)(I - T(h))\| \leq \|T(t+h)\| \|T(h) - I\| \leq \xi_t \|T(h) - I\| \xrightarrow{p} 0$$

*Ví dụ:* Cho  $A$  là toán tử tuyến tính liên tục trong không gian Banach xác suất  $V$ .

Khi đó  $T(t) = e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$  là một nửa nhóm liên tục đều.

*Chứng minh:* 1) Chuỗi  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \|A^k\|}{k!}$  là chuỗi dương hội tụ theo dấu hiệu

D'Alembert suy ra  $e^{tA}$  tồn tại.

2)  $T(t)$  là toán tử tuyến tính, bị chặn trong  $X$ . Ta sẽ chứng minh  $T(t+s) = T(t).T(s)$  hay  $e^{(t+s)A} = e^{tA}.e^{sA}$ . Thật vậy:

$$e^{tA}.e^{sA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^m A^m}{m!} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n s^m A^m}{n!m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \cdot \frac{s^{k-n} A^{k-n}}{(n-k)!}$$

$$(k = m+n, m \geq 0, 0 \leq k \leq n)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{n! t^{n-k} A^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{s^k A^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n A^n}{n!} = e^{(t+s)A}.$$

$T(t)$  bị chặn vì:  $\|T(t)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{t^n A^n}{n!} \right\| = e^{tA}$ .

3)  $T(t)$  là nửa nhóm vì  $T(t)$  là toán tử tuyến tính và  $T(0) = e^{0A} = I$ .

4)  $T(t)$  là liên tục đều  $\forall t_0 \in [0, +\infty)$ , tức là:  $\lim_{t \rightarrow t_0} e^{tA} = e^{t_0A}$ .

Thật vậy:

$$\|e^{tA} - e^{t_0A}\| = \|e^{(t_0+t-t_0)A} - e^{t_0A}\| = \|e^{t_0A}.e^{(t-t_0)A} - e^{t_0A}\| = \|e^{t_0A}(e^{(t-t_0)A} - I)\| \leq \|e^{t_0A}\| \|e^{(t-t_0)A} - I\|$$

Đặt  $h = t - t_0 \rightarrow 0$ . Ta sẽ chứng minh  $\lim_{h \rightarrow 0} e^{hA} = I$ .

Thật vậy:  $\|e^{hA} - I\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|h|^k \|A\|^k}{k!} = e^{|h|\|A\|} - 1$ .

**Định lý 3.**  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  được gọi là nửa nhóm liên tục đều. Khi đó,  $\exists M \in L^+(\Omega)$ ,

$\Delta \in L^+(\Omega)$  sao cho:  $\|T(t)\| \leq M.e^{\Delta t}$ .

*Chứng minh:* Chọn  $M = \text{Max}\{1, \xi_L\}$  nên  $M \in L^+(\Omega)$ ,  $M \geq 1$ , hơn nữa  $\|T(t)\| \leq M, \forall t \in [0, L]$

Bằng phương pháp quy nạp, ta có:  $\|T(nt)\| \leq M^n, \forall t \in [0, L], n \in N$

Cố định  $t > 0$ , tồn tại  $n \in N$  sao cho  $nT \leq t \leq (n+1)T$ . Khi đó:

$$\|T(t)\| = \left\| T\left((n+1)\frac{t}{n+1}\right) \right\| \leq M^{n+1} = M.e^{n \ln M} = M.e^{nT \frac{\ln M}{T}} \leq M.e^{\Delta t} \text{ với } \Delta = \frac{\ln M}{T} \in L_0^+(\Omega)$$

**Định lý 4.** Toán tử  $A$  là toán tử sinh của nửa nhóm toán tử liên tục đều trên không gian Banach xác suất  $X$  khi và chỉ khi  $A$  là toán tử bị chặn.

*Chứng minh:* Điều kiện đủ, nếu  $A$  là toán tử bị chặn thì là  $A$  toán tử sinh của nửa nhóm toán tử liên tục đều. Xét nửa nhóm  $T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = e^{tA}$

Ta sẽ chứng minh  $T(t)$  nửa nhóm liên tục đều.

$$\begin{aligned} \text{Xét } \left\| \frac{T(x)x-x}{t} - Ax \right\| &= \left\| \frac{1}{t} \left( \frac{tAx}{1!} + \frac{t^2 A^2 x}{2!} + \dots \right) - Ax \right\| = \left\| \frac{Ax}{1!} + \frac{tA^2 x}{2!} + \frac{t^2 A^3 x^3}{3!} + \dots - Ax \right\| \\ \Rightarrow \left\| \frac{T(x)x-x}{t} - Ax \right\| &= \left\| \frac{tA^2 x}{2!} + \frac{t^2 A^3 x}{3!} + \dots \right\| = t \left\| \frac{A^2 x}{2!} + \frac{tA^3 x}{3!} + \dots \right\| = t \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^{2+k}}{(2+k)!} x \right\| \\ &\leq t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \|A\|^{2+k} \|x\|}{(2+k)!} = tM \|x\| \rightarrow 0 (t \rightarrow 0) \quad (M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \|A\|^{2+k}}{(2+k)!}) \end{aligned}$$

là chuỗi dương hội tụ.

Điều kiện cần,  $T(t)$  là nửa nhóm liên tục đều bất kỳ. Khi đó toán tử sinh  $A$  là toán tử bị chặn.

$$\left\| I - \frac{1}{t} \int_0^t T(s) ds \right\| = \left\| \frac{1}{t} \int_0^t (I - T(s)) ds \right\| \leq \frac{1}{t} \int_0^t \|I - T(s)\| ds$$

Do tính liên tục đều  $\lim_{s \rightarrow 0} \|I - T(s)\| = 0 \Rightarrow \exists t_0$  sao cho:  $\|I - T(s)\| < M < 1, \forall s \in [0, t_0]$

$$\Rightarrow \frac{1}{t} \int_0^{t_0} \|I - T(s)\| ds \leq M \leq 1, \forall t \in [0, t_0] \quad \Rightarrow \exists \left( I - \frac{1}{t} \int_0^t T(s) ds \right)^{-1}, \forall t \in [0, t_0]$$

Ta sẽ chứng minh:  $A = (T(t_0) - I) \left( \int_0^{t_0} T(s) ds \right)^{-1} \in l(X)$ .

Thật vậy, vì:  $\|A\| < 1 \Rightarrow \frac{1}{h} (T(h) - I) \int_0^t T(s) ds = \frac{1}{h} \left( \int_0^t T(s+h) ds - \int_0^t T(s) ds \right)$

$$= \frac{1}{h} \left( \int_h^{t+h} T(s) ds - \int_0^t T(s) ds \right) = \frac{1}{h} \left( \int_t^{t+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right)$$

$$\frac{1}{h} \left( \int_t^{t+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right) = \frac{1}{h} \left( \int_0^s T(t+s) ds - \int_0^h T(s) ds \right)$$

$$\frac{1}{h} \left( \int_t^{t+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right) = \frac{1}{h} \left( \int_0^s T(t+s) ds - \int_0^h T(s) ds \right)$$

$$= \frac{1}{h} \left( T(t) \int_0^h T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right) = \frac{1}{h} \int_0^h T(s) ds (T(t) - I)$$

Lấy giới hạn hai vế:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (T(h) - I) \int_0^t T(s) ds = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \int_0^h T(s) ds (T(t) - I)$

$$\Rightarrow A \int_0^t T(s) ds = I(T(t) - I) = T(t) - I$$

$$A = T(t) = (T(t) - I) \left( \int_0^t T(s) ds \right)^{-1} \in l(X)$$

### 3. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi đã trình bày khái niệm nửa nhóm liên tục đều trong không gian Banach xác suất và chứng minh tính chất đặc trưng của toán tử sinh của nửa nhóm liên tục đều và gần đây nhóm chúng tôi đưa ra khái niệm nửa nhóm ngẫu nhiên liên tục mạnh trong không gian Banach xác suất và chứng minh một số tính chất của nó.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] D.H. Thang and T.N. Anh (2010), On random equations and applications to random point theorems, *Random Oper. Stochastic Equations* 18, pp. 199-212.
- [2] D.H. Thang, T.C. Son (2016), On the convergence of the product of independent random operators, *Stochas.Int. J.Prob, Stochas. Process.* 88,927-945.
- [3] D.H. Thang, T.C .Son và N .Thinh (2019), Semigroups of continuous module Homomorphisms on complex complete random normed modules, *Lithuanian Mathematical Journal*, 59(2): 229 - 250.
- [4] D.H. Thang, N .Thinh, Tr.X. Quy (2016), Abstract random linear operators on probabilistic unitary spaces, *J.Korean Math. Soc.* 53,2 347-362.
- [5] T.X. Guo. (1996), Module homomorphisms on random normed modules, *China Northeast. Math. J.*, 12 (1): 102-114.
- [6] D.H. Thang (1987), Random Operator in Banach spaces, *Probab. Math. Statist.* 8,155-157.

## UNIFORMLY CONTINUOUS SEMIGROUPS IN PROBABILITY BANACH SPACES

Le Thi Oanh

### ABSTRACT

*In this paper, we introduce the notion of uniformly continuous semigroups in probability Banach spaces and prove the common properties of the generator operator of a uniformly continuous semigroup.*

**Keywords:** *Probability Banach spaces, random operators, uniformly continuous semigroup, generator operators.*

\* Ngày nộp bài: 30/6/2020; Ngày gửi phản biện: 14/7/2020; Ngày duyệt đăng: 28/10/2020

\* Bài báo này là kết quả nghiên cứu từ đề tài cấp cơ sở mã số ĐT-2019-18 của Trường Đại học Hồng Đức.

# NGHIÊN CỨU SỬ DỤNG BÈO TÂY (*EICHHORNIA CRASSIPES*) VÀ CÂY SẬY (*PHRAGMITES AUSTRALIS*) XỬ LÝ NƯỚC BỊ Ô NHIỄM CÁC KIM LOẠI NẶNG, CADIMI (Cd), CHÌ (Pb), KẼM (Zn) VÀ ĐỒNG (Cu)

Lê Thị Thương<sup>1</sup>, Nguyễn Thị Mùi<sup>1</sup>

## TÓM TẮT

*Các thí nghiệm sử dụng thực vật là Bèo tây và Sậy trong việc xử lý ô nhiễm một số kim loại nặng như Kẽm (Zn), Cadimi (Cd), Chì (Pb), Đồng (Cu) trong môi trường nước khi thực hiện các thí nghiệm bổ sung kim loại nặng tương ứng theo các mức 0,5 mg/L Cd, 2 mg/L Pb, 5 mg/L Zn, 5 mg/l Cu trong các thùng nuôi mẫu thực vật. Kiểm tra hàm lượng các kim loại trong nước sau 5-10-20-30-40 ngày thí nghiệm trồng Bèo tây và Sậy, kết quả cho thấy cả Bèo tây và Sậy đều có khả năng tích lũy tốt các kim loại nặng (Pb, Cd, Zn, Cu). Sau 20 - 40 ngày tỉ lệ làm sạch các kim loại nặng trên của Bèo tây và Sậy hầu hết đạt mức 80%. Khả năng làm sạch đối với nước bị ô nhiễm Pb của Bèo tây nhanh hơn so với nước ô nhiễm Cd, Zn, Cu. Khả năng làm sạch đối với nước bị ô nhiễm Cd của Sậy nhanh hơn so với nước ô nhiễm Pb, Zn, Cu.*

**Từ khóa:** Bèo tây, cây Sậy, kim loại nặng, ô nhiễm nước.

### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Nước là tài nguyên thiên nhiên quan trọng đối với đời sống và sản xuất. Với xu hướng phát triển kinh tế - xã hội mạnh mẽ như hiện nay thì nhu cầu sử dụng nước ngày càng cao dẫn đến lượng nước thải bị ô nhiễm nhiều chất hoá học nguy hiểm phát sinh ra môi trường tự nhiên. Trong đó, ô nhiễm kim loại nặng (Chì (Pb), Đồng (Cu), Cadimi (Cd), Asen (As),...) là một vấn đề nghiêm trọng bởi độc tính đặc biệt nguy hiểm của các nguyên tố này đến sức khỏe con người, sinh vật và môi trường.

Những phương pháp truyền thống bao gồm các quá trình vật lý và hoá học dùng để xử lý kim loại nặng đang được áp dụng hầu hết đều có quy trình phức tạp, khá tốn kém về kinh tế và yêu cầu cao về điều kiện kỹ thuật. Xử lý ô nhiễm môi trường bằng thực vật là phương pháp xử lý các loại hình ô nhiễm đất, nước, không khí bằng các loài thực vật có khả năng hấp thụ, tích lũy hay phân giải chất ô nhiễm. Phương pháp này đã khắc phục được nhược điểm của các phương pháp truyền thống do tính thân thiện với môi trường, thực hiện với kỹ thuật đơn giản.

Bèo tây và Sậy đều là thực vật phổ biến, tốc độ sinh trưởng nhanh và không cần phải tốn công chăm sóc nên sử dụng hai loài thực vật này để xử lý ô nhiễm nước có thể thực hiện được dễ dàng trong điều kiện nông hộ.

<sup>1</sup> Khoa Kỹ thuật Công nghệ, Trường Đại học Hồng Đức

Trong nhiều nghiên cứu khoa học trên thế giới và ở Việt Nam, Bèo tây và Sậy được nhắc tới là thực vật tiềm năng trong xử lý ô nhiễm môi trường [1,2,3]. Phần lớn các nghiên cứu về Bèo tây tập trung vào khả năng xử lý các thành phần chất hữu cơ và chất dinh dưỡng trong nước thải, một số nghiên cứu về khả năng xử lý kim loại nặng của loài thực vật này nhưng chỉ mới thực hiện đối với một hoặc hai kim loại nặng [4]. Trong thực tế môi trường nước ô nhiễm kim loại nặng thường tồn tại nhiều loại kim loại đồng thời. Đối với Sậy, các nghiên cứu trước đây tập trung vào khả năng xử lý ô nhiễm đất [5] trong khi loài thực vật này còn có khả năng sinh trưởng trong vùng ngập nước có dòng chảy động. Vì vậy, nghiên cứu được thực hiện nhằm đưa ra đánh giá về khả năng hấp thụ riêng lẻ và tổng hợp các kim loại nặng (Pb, Cd, Zn, Cu) đối với Bèo tây và Sậy trong môi trường nước.

## 2. VẬT LIỆU VÀ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Các thí nghiệm được tiến hành trong 30 ngày với khối lượng mỗi loài trong mỗi chậu là 100g trọng lượng ướt. Trước khi trồng, rửa sạch bụi và đất bám ở cây bằng nước cất, cây được cố định bằng đá (giá thể chi phí thấp, hấp phụ kém), thùng trồng bằng xốp thể tích 30 lít.

Các thí nghiệm lựa chọn nồng độ thí nghiệm giả định dựa trên mức độ hàm lượng của ngưỡng cho phép sự có mặt của Zn, Cd, Pb, Cu trong môi trường nước theo QCVN 40:2011/BTNMT - Quy chuẩn kỹ thuật quốc gia về nước thải công nghiệp. Nồng độ thí nghiệm cao gấp từ 3 - 5 lần ngưỡng cho phép. Bèo tây và Sậy được nuôi trong môi trường nước tưới chứa các kim loại nặng Zn, Cd, Pb, Cu theo nồng độ lựa chọn:

Nước nuôi cây chứa 0,5 mg/L Cd

Nước nuôi cây chứa 2 mg/L Pb

Nước nuôi cây chứa 5 mg/L Zn

Nước nuôi cây chứa 5 mg/L Cu

Nước nuôi cây chứa 0,5 mg/L Cd, 2 mg/L Pb + 5 mg/L Zn + 5 mg/L Cu

*Hệ thống mẫu cây đối sánh:* Trồng cây trong nước cất với giá thể bằng đá.

*Chỉ tiêu phân tích:* Cd, Pb, Zn, Cu trong nước

*Phương pháp phân tích:* Phương pháp phân tích cực phổ.

*Địa điểm thực hiện:* Phòng thí nghiệm Kỹ thuật môi trường - Khoa Kỹ thuật công nghệ - Trường Đại học Hồng Đức.

## 3. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

### 3.1. Khả năng hạn chế các kim loại nặng của thực vật Bèo tây

#### 3.1.1. Khả năng hạn chế ô nhiễm Cadimi

Tiến hành sử dụng nước chứa hàm lượng Cd là 0,5 mg/L để thả Bèo tây cho thấy:

Sự sinh trưởng của cây đối với môi trường nước có hàm lượng Cadimi ở mức 0,5 mg/L, Bèo Tây có dấu hiệu sinh trưởng tốt, thân và lá chắc và xanh, không có sự thay đổi nhiều về kích thước.

Theo bảng 1, trong điều kiện thí nghiệm thùng nuôi mẫu, hàm lượng Cd trong nước giảm dần theo thời gian xử lý bằng Bèo tây, cụ thể: khi chưa có Bèo tây, hàm lượng Cd trong nước ở nồng độ thí nghiệm 1 là 0,5 mg/L. Sau 10 ngày thả Bèo tây, hàm lượng Cd trong nước là 0,359 mg/L, giảm được 28,2%. Đến ngày 40, hàm lượng Cd trong nước giảm mạnh còn 0,093 mg/L đạt tỉ lệ làm sạch 81,4%, ở mức thấp hơn nồng độ cho phép theo cột B, QCVN 40:2011/BTNMT - Quy chuẩn kỹ thuật quốc gia về nước thải công nghiệp.

**Bảng 1. Hàm lượng Cadimi trong nước theo thời gian xử lý bằng thực vật Bèo tây**

Ngày	Hàm lượng Cadimi trong nước (mg/L)	Tỉ lệ còn lại (%)
0	0,5	100
10	0,359	71,8
20	0,247	49,4
30	0,196	39,2
40	0,093	18,6
QCVN 40:2011/BTNMT (cột B)	0,1	

### 3.1.2. Khả năng hạn chế ô nhiễm Chì

Tiến hành sử dụng nước chứa hàm lượng Pb là 2 mg/L để thả Bèo tây cho thấy:

Sự sinh trưởng của cây trong môi trường nước bị ô nhiễm Chì sau thời gian 40 ngày vẫn tiếp tục sinh trưởng, tuy nhiên thân cây và lá có hiện tượng ngả màu vàng, nhiều lá bị đốm vàng, một số thân và lá héo úa, kích thước thân và lá giảm.

Hàm lượng Pb theo thời gian xử lý bằng Bèo tây được thể hiện qua bảng 2 trong nước trước thí nghiệm là 2,003 mg/L. Ở ngày thứ 10 của thí nghiệm, hàm lượng Pb trong nước là 1,172 mg/L, đạt tỉ lệ làm sạch là 41,4%. Sau 20 ngày thí nghiệm thì hàm lượng Pb giảm mạnh xuống dưới ngưỡng cho phép ở mức là 0,043 mg/L tương ứng với tỉ lệ còn lại trong dung dịch là 2,15%.

**Bảng 2. Hàm lượng Chì trong nước theo thời gian xử lý bằng thực vật Bèo tây**

Ngày	Hàm lượng Chì trong nước (mg/L)	Tỉ lệ còn lại (%)
0	2,003	100
10	1,172	58,6
20	0,043	2,15
30	0,007	0,35
40	KXD	
QCVN 40:2011/BTNMT (cột B)	0,5	

### 3.1.3. Khả năng hạn chế ô nhiễm Kẽm

Thực hiện thí nghiệm tương tự như với Cd và Pb, tiến hành nuôi Bèo tây trong dung dịch chứa 5mg/L Zn, theo dõi kết quả hàm lượng Zn trong dung dịch theo thời gian nhận thấy khả năng hấp thụ Zn của Bèo tây là tương đối tốt và đồng đều theo thời gian. Hàm lượng kẽm còn lại trong dung dịch sau 30 ngày thể hiện trong Bảng 3 là 1,952 mg/L đạt tỉ lệ xử lý là 60% và thấp hơn nhiều so với ngưỡng cho phép theo QCVN 40:2011/BTNMT.

Sự sinh trưởng của cây trong môi trường nước có nồng độ kẽm 5 mg/L sinh trưởng tốt, có sự phát triển về độ dài cây, cây đứng khỏe, những ngày cuối chu kỳ có hiện tượng một số lá bị héo và úa vàng.

**Bảng 3. Hàm lượng Kẽm trong nước theo thời gian xử lý bằng thực vật Bèo tây**

Ngày	Hàm lượng Kẽm trong nước (mg/L)	Tỉ lệ còn lại (%)
0	5	100
10	3,729	74,5
20	2,483	49,6
30	1,952	39,4
QCVN 40:2011/BTNMT (cột B)	3	

### 3.1.4. Khả năng hạn chế ô nhiễm Đồng

Thí nghiệm nuôi dưỡng Bèo tây trong dung dịch chứa hàm lượng Cu là 5 mg/L cho thấy xu hướng giảm nồng độ Cu theo thời gian được thể hiện trong bảng 4. Cụ thể sau 30 ngày thì hàm lượng Cu còn lại trong dung dịch đo được là 1,956 mg/L đạt hiệu quả xử lý là 63%, thấp hơn ngưỡng cho phép là 2 mg/L theo QCVN 40:2011/BTNMT.

Sự sinh trưởng của cây trong thí nghiệm đối với Bèo tây được nuôi dưỡng trong môi trường nước hàm lượng Đồng 5 mg/L cho thấy sự phát triển tốt, có sự phát triển về chiều dài ở một số tán cây, sự xuất hiện thêm các nhánh ở cây bèo, thân và lá xanh tốt.

**Bảng 4. Hàm lượng Đồng trong nước theo thời gian xử lý bằng thực vật Bèo tây**

Ngày	Hàm lượng Đồng trong nước (mg/L)	Tỉ lệ còn lại (%)
0	5	100
10	3,629	73,8
20	2,415	48,3
30	1,856	37,12
QCVN 40:2011/BTNMT (cột B)	2	



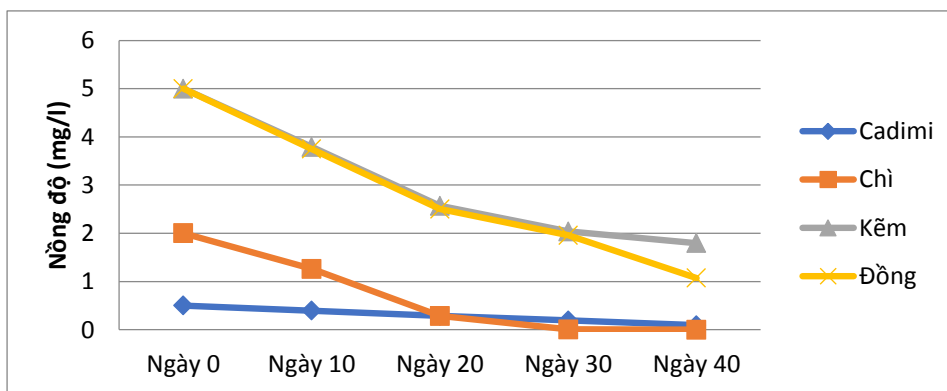
3.1.5. Khả năng hạn chế ô nhiễm Cd, Pb, Zn, Cu trong môi trường nước của Bèo tây

Thí nghiệm trồng Bèo tây trong dung dịch chứa Cd 0,5 mg/L + Pb 2 mg/L + Zn 5 mg/L + Cu 5 mg/L cho kết quả về khả năng hấp thụ kim loại nặng của Bèo tây theo thời gian có xu hướng tương tự như dung dịch bị ô nhiễm riêng lẻ các nguyên tố.

Bảng 5 thể hiện kết quả sau 20 ngày thí nghiệm, hàm lượng Pb còn lại trong dung dịch đạt mức thấp nhất (Pb 0,284 mg/L) so với các nguyên tố khác và đã nằm dưới ngưỡng an toàn theo cột B QCVN 40:2011/BTNMT. Đến cuối thời gian khảo sát 40 ngày, tỉ lệ làm sạch của Bèo tây với tất cả các kim loại nặng (Cd, Pb, Zn, Cu) hầu hết đều đạt mức cao (65-100%).

**Bảng 5. Hàm lượng các kim loại nặng trong nước theo thời gian xử lý bằng thực vật Bèo tây**

Ngày	Nồng độ Cadimi (mg/L)	Tỉ lệ còn lại (%)	Nồng độ Chì (mg/L)	Tỉ lệ còn lại (%)	Nồng độ Kẽm (mg/L)	Tỉ lệ còn lại (%)	Nồng độ Đồng (mg/L)	Tỉ lệ còn lại (%)
0	0,5	100	2	100	5	100	5	100
10	0,395	79	1,263	63,2	3,792	75,8	3,749	74,9
20	0,287	57,4	0,284	14,2	2,568	51,4	2,502	50,1
30	0,193	38,6	0,006	0,3	2,037	40,7	1,958	39,2
40	0,092	18,4	KXĐ	0	1,796	35,9	1,073	21,5
QCVN 40:2011/BTNMT (cột B)	0,1		0,5		3		2	



**Biểu đồ 1. Sự biến thiên hàm lượng kim loại nặng trong môi trường nước ô nhiễm theo tỉ lệ tổng hợp khi nuôi Bèo Tây**

3.2. Khả năng hạn chế ô nhiễm kim loại nặng của thực vật Sậy

3.2.1. Khả năng hạn chế ô nhiễm Cadimi

Tiến hành sử dụng nước pha tỉ lệ Cd là 0,5 mg/L nuôi các mẫu Sậy. Kết quả thu được về hàm lượng Cd trong nước nuôi cấy theo thời gian được thể hiện trong bảng 6.

Sau 10 ngày nuôi cấy, hàm lượng Cd còn lại trong nước chỉ ở mức 0,265 mg/L đạt tỉ lệ xử lý đến 47%. Sau 30 ngày hàm lượng Cd còn lại trong môi trường chỉ còn 0,075mg/L đạt tỉ lệ xử lý lên đến 85% và ở mức dưới giới hạn cho phép sự có mặt của Cadimi theo cột B QCVN 40:2011/BTNMT.

Sự sinh trưởng của cây trong môi trường có nồng độ Cd cho thấy Sậy có khả năng hấp thu Cd tốt, cây ít bị chết, có khả năng sinh trưởng tốt, có sự phát triển về chiều cao của cây. Tuy nhiên, theo thời gian đến cuối chu kỳ khảo sát có nhiều tán lá bị vàng úa.

**Bảng 6. Hàm lượng Cadimi trong nước theo thời gian xử lý bằng thực vật Sậy**

Ngày	Hàm lượng Cadimi trong nước (mg/L)	Tỉ lệ còn lại (%)
0	0,5	100
5	0,374	74,8
10	0,265	53
15	0,163	32,6
20	0,112	22,4
25	0,0735	14,7
QCVN 40:2011/BTNMT (cột B)	0,1	

### 3.2.2. Khả năng hạn chế ô nhiễm Chì

Nuôi dưỡng Sậy trong môi trường chứa Pb cho thấy cây Sậy có khả năng hấp thu Pb, cây vẫn sinh trưởng tốt ở nồng độ Pb 2mg/L, sau khoảng thời gian 30 ngày thì nồng độ Pb trong môi trường nước đạt xấp xỉ mức cho phép sự có mặt của chì là 0,5 mg/L theo cột B QCVN 40:2011/BTNMT.

Sự sinh trưởng của cây vẫn được duy trì và có sự tăng trưởng chiều cao. Tuy nhiên sau nửa chu kỳ khảo sát quan sát thấy cây có hiện tượng bị vàng lá.

**Bảng 7. Hàm lượng Chì trong nước theo thời gian xử lý bằng thực vật Sậy**

Ngày	Hàm lượng Chì trong nước (mg/L)	Tỉ lệ còn lại (%)
0	2	100
5	1,762	88,1
10	1,531	76,5
15	1,293	64,6
20	1,036	51,8
25	0,896	44,8
30	0,517	25,9
QCVN 40:2011/BTNMT (cột B)	0,5	

### 3.2.3. Khả năng hạn chế ô nhiễm Kẽm

Sự sinh trưởng của cây ở môi trường nước có nồng độ Zn 5 mg/l cho thấy sự hấp thu Zn tốt. Cây sinh trưởng và phát triển tốt. Trong chu kỳ khảo sát quan sát thấy chiều cao cây tăng, tán lá phát triển mới.

Thí nghiệm nuôi cây cho thấy kết quả được thể hiện trong bảng 8. Khả năng hấp thu Zn của cây Sậy đồng đều theo thời gian. Sau 30 ngày nồng độ Zn trong môi trường nước dưới giới hạn cho phép sự có mặt của Zn trong môi trường nước theo Cột B QCVN 40:2011/BTNMT.

**Bảng 8. Hàm lượng Kẽm trong nước theo thời gian xử lý bằng thực vật Sậy**

Ngày	Hàm lượng Kẽm trong nước (mg/L)	Tỉ lệ còn lại (%)
0	5	100
10	3,832	76,7
20	2,571	51,4
30	2,016	40
QCVN 40:2011/BTNMT (cột B)	3	

### 3.2.4. Khả năng hạn chế ô nhiễm Đồng

Thực hiện thí nghiệm nuôi cấy tương tự như với các kim loại nặng khác, Sậy được nuôi dưỡng trong môi trường nước có hàm lượng Cu là 5 mg/L và kết quả khảo sát về sự thay đổi hàm lượng Cu được biểu diễn trong bảng 9. Ta thấy hàm lượng Cu giảm sau mỗi khoảng thời gian khảo sát. Đến ngày thứ 30 thì hàm lượng Cu còn lại trong nước là 2,314 mg/L đạt hiệu quả xử lý 53,8% nhưng vẫn chưa đạt dưới mức cho phép theo cột B QCVN 40:2011/BTNMT. Tuy nhiên, xét sự sinh trưởng của cây thì kết quả theo dõi cho thấy theo thời gian thì cây Sậy nuôi trong môi trường này có dấu hiệu kém sinh trưởng, thân cây, lá cây có xu hướng bị vàng. Đến ngày thứ 21 thì thấy rõ hiện tượng bị vàng lá và thân cây trở nên mềm ở 90% cây. Đến cuối chu kỳ khảo sát, cây héo, vàng và không quan sát được khả năng sống.

**Bảng 9. Hàm lượng Đồng trong nước theo thời gian xử lý bằng thực vật Sậy**

Ngày	Hàm lượng Đồng trong nước (mg/L)	Tỉ lệ còn lại (%)
0	5	100
10	3,826	76,5
20	2,739	54,8
30	2,314	46,3
QCVN 40:2011/BTNMT (cột B)	2	

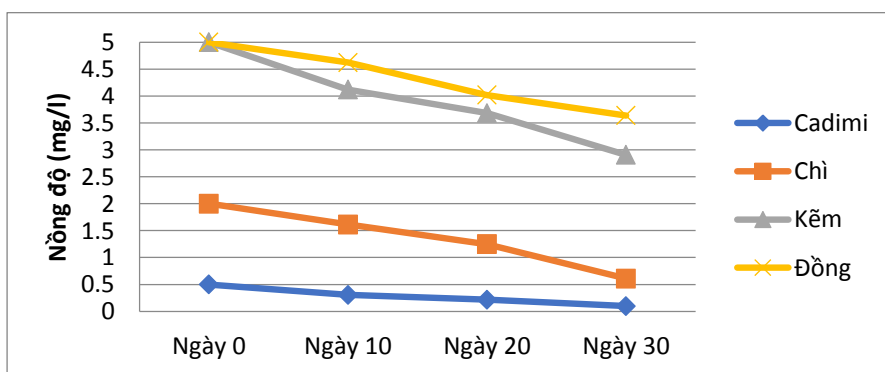
### 3.2.5. Khả năng hạn chế ô nhiễm Cd, Pb, Zn, Cu trong môi trường nước của thực vật Sậy

Thí nghiệm trồng Sậy trong dung dịch chứa Cd 0,5 mg/L + Pb 2 mg/L + Zn 5 mg/L + Cu 5 mg/L cho kết quả về khả năng hấp thụ kim loại nặng của cây Sậy theo thời gian có xu hướng tương tự như dung dịch bị ô nhiễm riêng lẻ các nguyên tố. Cây vẫn sinh trưởng tốt tuy nhiên không có sự thay đổi nhiều về chiều cao, tính chất thân và lá.

Kết quả từ bảng nồng độ các kim loại nặng (bảng 10) và quá trình khảo sát sự sinh trưởng của cây cho thấy khả năng hấp thụ tốt các kim loại nặng của cây Sậy trong môi trường tổng hợp cho thấy: Cd có xu hướng được hấp thụ tốt nhất trong các kim loại và xu hướng hấp thụ các kim loại cũng gần tương tự như xu hướng hấp thụ trong môi trường đơn. Cu là kim loại có tỉ lệ hấp thụ kém nhất trong môi trường tổng hợp. Sau 10 ngày đầu tiên thì Cd là kim loại có tỉ lệ xử lý cao nhất đạt gần 40% trong khi đó với Pb, Zn đạt tỉ lệ xử lý vào khoảng 20% và Cu chỉ đạt mức 7,6%. Kết quả phân tích cho thấy sau 30 ngày so với các giá trị trong cột B QCVN 40 :2011/BTNMT thì hàm lượng Cd (đạt tỉ lệ xử lý 80%) và Kẽm có trong môi trường nước ở mức dưới giới hạn cho phép, hàm lượng Chì ở mức xấp xỉ giới hạn cho phép và Đồng vẫn lớn hơn giới hạn cho phép.

**Bảng 10. Hàm lượng kim loại nặng trong nước nuôi dưỡng thực vật Sậy theo thời gian**

Ngày	Nồng độ Cadimi (mg/L)	Tỉ lệ còn lại	Nồng độ Chì (mg/L)	Tỉ lệ còn lại	Nồng độ Kẽm (mg/L)	Tỉ lệ còn lại	Nồng độ Đồng (mg/L)	Tỉ lệ còn lại
0	0,5	100	2	100	5	100	5	100
10	0,307	61,4	1,613	80,1	4,118	82,4	4,621	92,4
20	0,216	43,2	1,248	62,4	3,682	73,6	4,018	80
30	0,098	19,6	0,610	30,5	2,907	58,1	3,637	72,7
QCVN 40:2011/BTNMT (cột B)	0,1		0,5		3		2	



**Biểu đồ 2. Sự biến thiên hàm lượng kim loại nặng trong môi trường ô nhiễm kim loại tổng hợp có nuôi thực vật Sậy**

#### 4. KẾT LUẬN

Các thí nghiệm trồng Bèo tây và cây Sậy trong môi trường nước có chứa các kim loại nặng (Cd, Pb, Zn, Cu) cho thấy hai loài thực vật này vẫn có thể sinh trưởng và phát triển được ở mức độ ô nhiễm nhất định. Các kết quả phân tích hàm lượng kim loại nặng (Cd, Pb, Zn, Cu) trong nước cho thấy xu hướng giảm dần nồng độ theo thời gian. Như vậy, cả hai loài thực vật đều có khả năng làm sạch nước bị ô nhiễm kim loại nặng (Cd, Pb, Zn, Cu) rất tốt. Đối với các nồng độ kim loại nặng được thử nghiệm trong nghiên cứu, Bèo tây và cây Sậy thể hiện hiệu quả xử lý từ 20 - 40 ngày thì các hàm lượng Cd, Pb, Zn, Cu trong nước đều đã đạt mức dưới ngưỡng cho phép theo cột B QCVN 40:2011/BTNMT.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Phạm Khánh Huy, Nguyễn Phạm Hồng Liên (2012), Nghiên cứu xử lý nước thải sinh hoạt bằng mô hình thủy sinh nuôi Bèo lục bình, *Tạp chí KTKT Mỏ - Địa chất số 40/10-2012*, tr.16-22.
- [2] Tangahu, Bieby Voijant, et al. (2011), A review on heavy metals (As, Pb, and Hg) uptake by plants through phytoremediation, *International Journal of Chemical Engineerin.*
- [3] Zimmels, Y., F. Kirzhner, S. Roitman (2004), Use of naturally growing aquatic plants for wastewater purification, *Water Environment Research* 76(3), pp. 220-230.
- [4] Đồng Thị Minh Hậu, Hoàng Thị Thanh Thủy, Đào Phú Quốc (2008), Nghiên cứu và lựa chọn một số thực vật có khả năng hấp thu các kim loại nặng (Cr, Cu, Zn) trong bùn nạo vét kênh Tân Hóa - Lò gôm, *Tạp chí Phát triển Khoa học và Công nghệ*, tập 11, số 04.
- [5] Trần Thị Phả, Đặng Văn Minh, Lê Đức, Hoàng Văn Hùng, Đàm Xuân Vận (2013), Nghiên cứu sự phân bố, khả năng sinh trưởng, phát triển và hấp thụ kim loại nặng của cây sậy (*Phragmites australis*) trên đất sau khai thác quặng tại tỉnh Thái Nguyên, *Tạp chí Nông nghiệp và Phát triển nông thôn*, số 5, tr.193-199.

### **RESEARCH ON HANDLING HEAVY METAL POLLUTION (Cd, Pb, Zn, Cu) IN WATER BY WATER HYACINTH (*EICHHORNIA CRASSIPES*) AND REED (*PHRAGMITES AUSTRALIS*)**

Le Thi Thuong, Nguyen Thi Mui

#### ABSTRACT

*This study carried out experiments to cultivate Water hyacinth and Reed in sample containers containing heavy metal-contaminated water at the following*

*concentrations: 0.5 mg/L Cd, 2 mg/L Pb, 5 mg/L Zn, 5 mg/L Cu. Heavy metal concentrations in sample containers are checked after 5-10-20-30-40 days. The results show that both Water hyacinth and reed are capable of accumulating heavy metals (Zn, Cd, Pb, Cu). After 20-40 days, the rate of cleaning of water hyacinth and reed is almost 80%. The ability to clean the Pb contaminated water of Water hyacinth is faster than that of Cd, Zn, Cu polluted water while the ability to clean the Cd contaminated water of Reed is faster than that of polluted water of Cd, Zn and Cu.*

**Key words:** *Water hyacinth, Reed, heavy metal, water pollution.*

*\* Ngày nộp bài: 4/6/2020; Ngày gửi phản biện: 11/6/2020; Ngày duyệt đăng: 28/10/2020*

*\* Bài báo này là kết quả nghiên cứu từ đề tài cấp cơ sở mã số ĐT-2018-19 của Trường Đại học Hồng Đức*

**HONG DUC UNIVERSITY  
JOURNAL OF SCIENCE**

**No 51 (10 - 2020)**

**CONTENT**

1	<i>Le Viet Bau Cam Ba Thuc Nguyen Ngoc Han</i>	Safe electric system for multi medical bed used for of joint stiffnem and arthritis patients	5
2	<i>Le Ngoc Anh</i>	The correlation between the contents of some heavy metals with coastal sediment particle size	15
3	<i>Doan Thanh Canh, Pham Thi Ha</i>	Study of current transformer model based on the stimulating properties in experiments	21
4	<i>Nguyen Manh Cuong Bui Khac Thien</i>	Recovery of functions in besov-type spaces by linear sampling methods	27
5	<i>Nguyen Thi Dung Nguyen Thi Viet Chinh Nguyen Van Dang Tran Dang Thanh</i>	Structure and magnetic properties of $\text{Pr}_{0.7}\text{A}_{0.3}\text{MnO}_3$ (A = Ca, Sr, Ba) ceramics prepared by combination of reactive milling and heat treatment methods	38
6	<i>Le Thi Giang</i>	Study the effects of carbon concentration on structural properties of $\text{Mn}_5\text{Ge}_3$ thin films grown on Ge(111)	48
7	<i>Hoang Dinh Hai Vu Thi Nhi Nguyen Thi Huong</i>	Ring with left small annihilator conditions	56
8	<i>Do Thi Hai</i>	Study of the flora compositions in Mieng mountain, Phuc Thinh commune, Ngoc Lac district, Thanh Hoa province	66
9	<i>Tran Thi Hai Nguyen Thi Thao Nguyen Thi Dung Nguyen Thi Tu</i>	Study the mobilities of carriers dependent on temperature in Ge channel modulation-doped structures	72

10	<i>Le Van Hao</i> <i>Trinh Thi Anh Loan</i> <i>Le Viet Nam</i> <i>Nguyen Duc Toan</i>	A deep learning technique for fraud face detection	83
11	<i>Hoang Dieu Hong</i>	The solow economic growth model	95
12	<i>Trinh Thi Hong</i> <i>Nguyen Huu Tan</i> <i>Thieu Thi Huyen</i>	Food spectrum of some amphibians of the Microhylidae in Ben En National Park, Thanh Hoa province	106
13	<i>Nguyen Manh Hung</i>	Some basic properties for generating function	114
14	<i>Le Quang Huy</i>	Castelnouvo-mummford regularity of edge ideal and the minimum size of a maximal matching of simple graphs	119
15	<i>Le Thi Oanh</i>	Uniformly continuous semigroups in probability Banach spaces	127
16	<i>Le Thi Thuong</i> <i>Nguyen Thi Mui</i>	Research on handling heavy metal pollution (Cd, Pb, Zn, Cu) in Water by water hyacinth ( <i>Eichhornia Crassipes</i> ) and Reed ( <i>Phragmites Australis</i> )	133